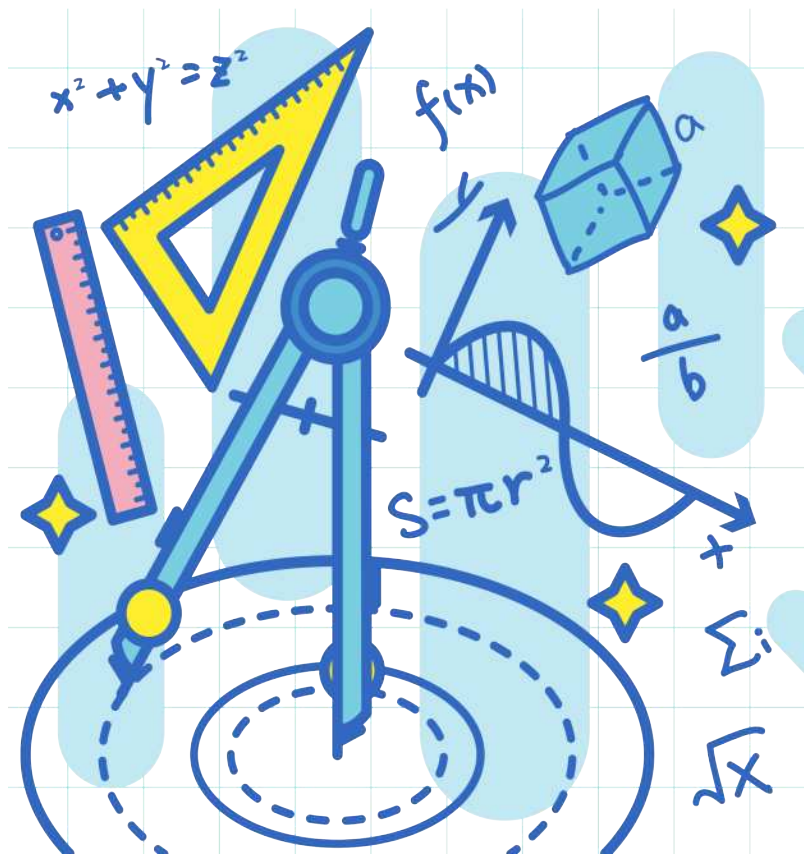
Class 9-10 General Math Solution

বাস্তব সংখ্যা

❑ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।
- অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সদৃশ ও বিসদৃশ দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

স্বাভাবিক সংখ্যা : 1, 2, 3, 4.......... ইত্যাদি সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলে। 2, 3, 5, 7......... ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যা এবং 4, 6, 8, 9......... ইত্যাদি যৌগিক সংখ্যা।

পূর্ণসংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ .... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$......... ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

ভগ্নাংশ সংখ্যা : p, q পরস্পর সহমৌলিক, $q \neq 0$ এবং $q \neq 1$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে ভগ্নাংশ সংখ্যা বলে। যেমন : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{3}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশ সংখ্যা।

$p < q$ হলে ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $p > q$ হলে ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$, ... ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং

$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$,..... ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যা : p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। যেমন : $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5, \frac{5}{3} = 1.666...$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা। মূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং সকল পূর্ণসংখ্যা এবং সকল ভগ্নাংশ সংখ্যা হবে মূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন :

$\sqrt{2} = 1.414213.....$, $\sqrt{3} = 1.732.....$,
$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.58113....$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা : মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করা হলে তাকে দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন,

$3 = 3\cdot0, \frac{5}{2} = 2\cdot5, \frac{10}{3} = 3\cdot3333.......$, $\sqrt{3} = 1\cdot732.........$

ইত্যাদি দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা সসীম হলে, এদেরকে সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্ক সংখ্যা অসীম হলে, এদেরকে অসীম দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন, $0\cdot52, 3\cdot4152$ ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং $1\cdot333.......$, $2\cdot123512367..........$ ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। আবার, অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলোর মধ্যে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি হলে, তাদেরকে অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি না হলে তাদের অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা বলা হয়। যেমন, $1\cdot2323.......$, $5\cdot6\dot{5}4$ ইত্যাদি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং $0\cdot523050056.......$, $2\cdot12340314.......$ ইত্যাদি অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

বাস্তব সংখ্যা : সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। যেমন :

$0, \pm1, \pm2, \pm3$,.........

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3}$,.........

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$...... ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যা।

$1\cdot23, 0\cdot415, 1\cdot3333.......$, $0\cdot62$, $4\cdot120345061..........$

ধনাত্মক সংখ্যা : শূন্য অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যাকে ধনাত্মক সংখ্যা বলা হয়। যেমন,

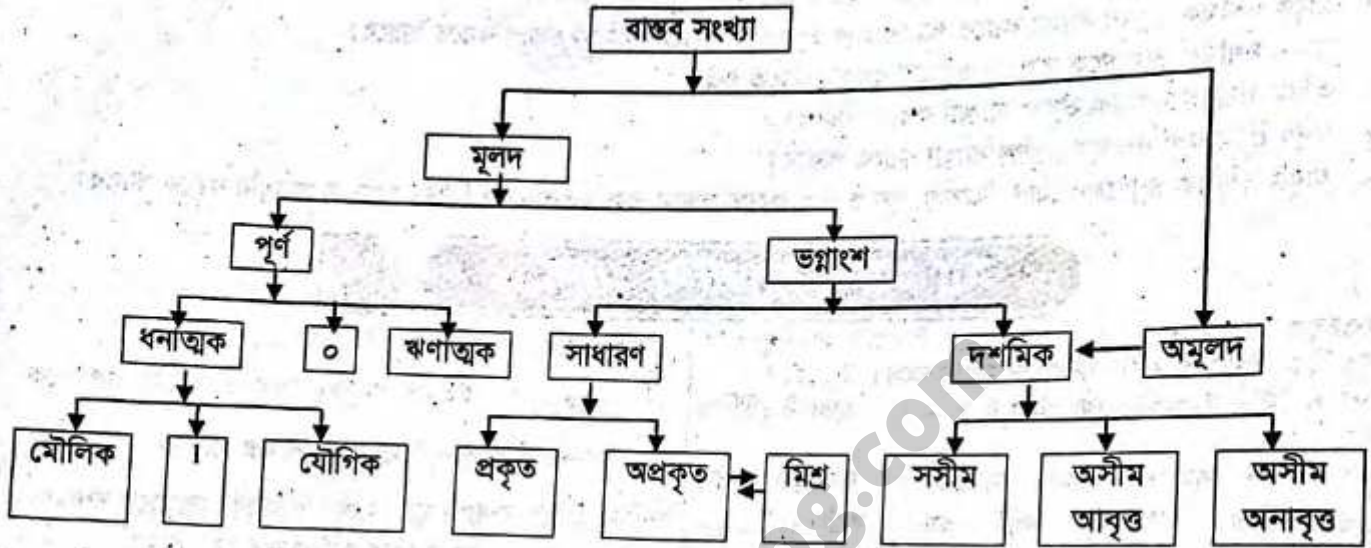
$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, 0\cdot415, 0\cdot\dot{6}\dot{2}, 4\cdot120345061$............ ইত্যাদি ধনাত্মক সংখ্যা।

ঋণাত্মক সংখ্যা : শূন্য অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাকে ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, $-1, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, -0.415, -0.\dot{6}\dot{2}, -4.120345061$.......... ইত্যাদি ঋণাত্মক সংখ্যা।

অঋণাত্মক সংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যাকে অঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, $0, 3, \frac{1}{2}, 0\cdot612, 1\cdot\dot{3}, 2\cdot120345$............ ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ **কাজ :** $\frac{3}{4}, 5, -7, \sqrt{13}, 0, 1, \frac{9}{7}, 12, 2\frac{4}{5}, 1.1234......, .\dot{3}2\dot{3}$ সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে অবস্থান দেখাও। [পৃষ্ঠা– ৪]

সমাধান : নিচে প্রদত্ত সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে অবস্থান দেখানো হলো–

$\frac{3}{4}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

5 একটি মূলদ সংখ্যা।

–7 একটি পূর্ণ সংখ্যা।

$\sqrt{13}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

০ একটি পূর্ণ সংখ্যা।

1 একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\frac{9}{7}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

12 একটি মূলদ সংখ্যা।

$2\frac{4}{5}$ একটি সাধারণ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ সংখ্যা।

1.1234....... একটি অমূলদ সংখ্যা।

$.\dot{3}2\dot{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

☐ **কাজ :** প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। [পৃষ্ঠা–৬]

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 3 < 4$

$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

বা, $1 < \sqrt{3} < 2$

প্রমাণ : $1^2 = 1, \sqrt{3}^2 = 3, 2^2 = 4$

সুতরাং $\sqrt{3}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{3}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore$ $\sqrt{3}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

ধরি, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$; [বর্গ করে]

বা, $3q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : 3q পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

$\therefore$ 3q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $3q \neq \frac{p^2}{q}$

$\sqrt{3}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারে কোন সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

❑ **কাজ : 1.723, 5.2333..., 0.0025, 2.1356127...., 0.0105105 ..... এবং 0.450123...... ভগ্নাংশগুলোকে কারণসহ শ্রেণিবিন্যাস কর।** **[পৃষ্ঠা–৬]**

সমাধান : 1.723 ভগ্নাংশটি একটি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক রয়েছে।

5.2333...... ভগ্নাংশটি একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলোর অঙ্কবিশেষ বার বার রয়েছে।

0.0025 ভগ্নাংশটি একটি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক রয়েছে।

2.1356124......ভগ্নাংশটি একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় বা অঙ্কবিশেষ বারবার আসেনি। একে অমূলদসংখ্যাও বলা হয়।

0.0105105...... ভগ্নাংশটি একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় এবং অঙ্কবিশেষ বার বার রয়েছে। একে মূলদ সংখ্যাও বলা হয়।

0.450123....... ভগ্নাংশটি একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় বা অঙ্কবিশেষ বার বার আসেনি। একে অমূলদ সংখ্যাও বলা হয়।

❑ **কাজ : $0.\dot{4}\dot{1}$ এবং $3.04\dot{6}2\dot{3}$ কে ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।** **[পৃষ্ঠা–১০]**

সমাধান : $0.\dot{4}\dot{1}$

এখানে, $0.\dot{4}\dot{1} = 0.414141......$

সুতরাং, $0.\dot{4}\dot{1} \times 100 = 41.4141$

এবং, $0.\dot{4}\dot{1} \times 1 = .4141$

(–) করে, $0.\dot{4}\dot{1} \times 99 = 41$

অতএব, $0.\dot{4}\dot{1} = \frac{41}{99}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{41}{99}$

এবং 3.4623

এখানে, $3.04\dot{6}2\dot{3} = 3.04623623$

সুতরাং $3.04\dot{6}2\dot{3} \times 100000 = 304623.623$

$3.04\dot{6}2\dot{3} \times 100 = 304.623623$

(–) করে, $3.04\dot{6}2\dot{3} \times 99900 = 304623 - 304$

বা, $3.04\dot{6}2\dot{3} = \frac{304319}{99900}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{304319}{99900}$

❑ **কাজ : $0.0\dot{1}\dot{2}$ এবং $3.3\dot{1}2\dot{4}$ কে ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।** **[পৃষ্ঠা–১১]**

সমাধান : $0.0\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

$3.3\dot{1}2\dot{4} = \frac{33124 - 331}{9900} = \frac{32793}{9900} = \frac{10931}{3300}$

❑ **কাজ : 3.467, $2.01\dot{2}4\dot{3}$ এবং $7.52\dot{5}\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।** **[পৃষ্ঠা–১২]**

সমাধান : 3.467 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ০

$2.01\dot{2}4\dot{3}$ এ " " " " 2 এবং " " " " 3

$7.52\dot{5}\dot{6}$ এ " " " " 2 এবং " " " " 2

এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2, 3 এর ল.সা.গু. 6। অর্থাৎ ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে, অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্কের সংখ্যা হবে 6।

∴ $3.467 = 3.467000000$

$2.01\dot{2}4\dot{3} = 2.012432432$

$7.52\dot{5}\dot{6} = 7.525656565$

❑ **কাজ : যোগ কর :** **[পৃষ্ঠা–১৪]**

১। $2.0\dot{9}\dot{7}$ ও $5.12\dot{7}6\dot{8}$

সমাধান : ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 ল.সা.গু. 6।

এখন দুটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে যোগ করা হলো :

$2.0\dot{9}\dot{7} = 2.09797979 \mid 79$

$5.12\dot{7}6\dot{8} = 5.12768768 \mid 76$

$= 7.22566748 \mid 55$

∴ নির্ণেয় যোগফল = 7.22566748

২। $1.3\dot{4}\dot{5}$, $0.3\dot{1}57\dot{6}$ ও $0.0\dot{5}67\dot{8}$

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 1, 3, 2 এর ল.সা.গু. 6। এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে যোগ করা হলো–

1.345	=	1.345555555 | 55
031576	=	0.315765765 | 76
8.05678	=	8.056787878 | 78
	=	9.718109200 | 09

∴ নির্ণেয় যোগফল = 9.718109200

☐ কাজ : [পৃষ্ঠা–১৫

১। 13.12784 থেকে 10.418 বিয়োগ কর।

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3.
এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে বিয়োগ করা হলো–

13.12784	=	13.127847 | 84
10.418	=	10.418000 | 00
	=	2.709847 | 84

∴ নির্ণেয় যোগফল = 2.709847

২। 230394 থেকে 9.2645

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে বিয়োগ করা হলো–

23.0394	=	23.03949494 | 94
9.12645	=	9.12645645 | 64
	=	13.91303849 | 30

∴ নির্ণেয় যোগফল = 13.91303849

☐ কাজ : [পৃষ্ঠা–১৬

১। 1.13 কে 2.6 দ্বারা গুণ কর।

সমাধান: $1.1\dot{3} = \frac{113-11}{90} = \frac{102}{90}$

$2.\dot{6} = \frac{26}{10}$

$\therefore\ 1.13 \times 2.6 = \frac{102}{90} \times \frac{26}{10} = \frac{2652}{900}$

$= 2.9466... = 2946$

২। $0.\dot{2} \times 1.\dot{1}\dot{2} \times 0.0\dot{8}\dot{1}$ = কত?

সমাধান: $0.2 \times 1.12 \times 0.081$

$= \frac{2}{9} \times \frac{112-1}{99} \times \frac{81}{990}$

$= \frac{2}{9} \times \frac{111}{99} \times \frac{81}{990}$ (কাটাকাটি: 99 → 11, 81 → 9, 990 → 110)

$= \frac{1111}{5445}$

$= 0.0203856 .....$

[পৃষ্ঠা–১৭]

☐ কাজ :

১। 0.6 কে 0.9 দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান: $0.\dot{6} \div 0.\dot{9}$

এখানে, $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ এবং $0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1$

$\therefore\ 0.\dot{6} \div 0.\dot{9} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{3}{2}$

২। $0.\dot{7}3\dot{2}$ কে $0.\dot{0}2\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান: $0.\dot{7}3\dot{2} = \frac{732-7}{990}$

$= \frac{725}{990} = \frac{145}{198}$

এবং $0.0\dot{2}\dot{7} = \frac{27}{990}$

$0.732 \div 0.027 = \frac{145}{198} = \frac{27}{990}$ (কাটাকাটি: 27 → 3, 990 → 110)

$= \frac{145}{198} = \frac{110}{3}$ (কাটাকাটি: 110 → 5, 198 → 9)

$= \frac{725}{27}$

$= 26.851851 .....$

$= 26.\dot{8}5\dot{1}$

☐ কাজ : [পৃষ্ঠা–১৮

১। 29 এর বর্গমূল নির্ণয় কর এবং বর্গমূলকে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান: 5) 29 (5.3851.....

```
        25
103   | 400
      | 309
1068  | 9100
      | 8544
10765 | 55600
      | 53825
107701| 177500
      | 107701
        69799
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 5.3851....
নির্ণেয় দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 5.38
এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 5.39

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ– ১। $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে দুটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে দুটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, $\sqrt{3}$ = ১.৭৩২০৫০৮.......

মনে করি, a = ২.০৩০০৩৩০০০৩৩৩......

এবং b = ২.৫০৫৫০০৫৫৫.......

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ $\sqrt{3} < 2.03003300333........ < 4$

এবং $\sqrt{3} < 2.505500555........ < 4$

আবার, a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

∴ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

প্রতিজ্ঞা : $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 2 < 4$

$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

বা, $1 < \sqrt{2} < 2$

প্রমাণ : $1^2 = 1, (\sqrt{2}) = 2, 2^2 = 4$

সুতরাং $\sqrt{2}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট।

অতএব $\sqrt{2}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

∴ $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে

ধরি, $\sqrt{2}\frac{p}{q}$; যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

বা, $2 = \frac{p^2}{q^2}$; বর্গ করে

বা, $2q = \frac{p^2}{q}$; উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে।

স্পষ্টত : 2q পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$, পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

∴ 2q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $2q \neq \frac{p^2}{q}$

∴ $\sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$

∴ $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ২। প্রমাণ কর যে, কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান : মনে করি, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা যথাক্রমে $x, x + 1, x + 2, x + 3$

ক্রমিক সংখ্যা চারটির গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে পাওয়া যায়,

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = x(x + 3)(x + 1)(x + 2) + 1$

$= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$

$= a(a + 2) + 1$; $[x^2 + 3x = a$ ধরে$]$

$= a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2$; যা একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা।

∴ যে কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে। (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ৩। $\frac{3}{11}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান :

```
11 ) 30 ( 0.2727
     22
     ---
      80
      77
      ---
       30
       22
       ---
        80
        77
        ---
         3
```

∴ নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ = 0.2727.....

$= 0.\dot{2}\dot{7}$

উদাহরণ– ৪। $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান :

```
37 ) 95 ( 2.56756
     74
     ---
     210
     185
     ---
      250
      222
      ---
       280
       259
       ---
        210
        185
        ---
         250
         222
         ---
          28
```

∴ নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ = 2.56756.......

$= 2.5\dot{6}7\dot{5}$

উদাহরণ– ৮। 32.3478 কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $42.34\dot{7}\dot{8} = 42.347878..........$

সুতরাং, $42.34\dot{7}\dot{8} \times 10000 = 42.347878 .... \times 10000 = 42348.7878$

এবং $42.34\dot{7}\dot{8} \times 100 = 42.347878 ...... \times 100 = 4234.7878$

বিয়োগ করে, $42.34\dot{7}\dot{8} \times 9900 = 423478 - 4234$

অতএব, $42.34\dot{7}\dot{8} = \frac{423478 - 4234}{9900} = \frac{419244}{9900} = \frac{34937}{825} = 42\frac{287}{825}$

উদাহরণ– ১২। 5.23457 কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : 5.23457 = 5.23457457457.......

সুতরাং 5.23457 × 100000 = 523457.457457

এবং 5.23457 × 100 = 523.457457

বিয়োগ করে, 5.23457 × 99900 = 522943

অতএব, $5.23457 = \frac{522934}{99900} = \frac{261467}{49950}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{261467}{49950}$

উদাহরণ– ১৩। 1.7643, 3.24 ও 2.78346 কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।

সমাধান : 1.7643 এ অনাবৃত্ত অঙ্ক বলতে দশমিক বিন্দুর পরের ৪টি অঙ্ক, এখানে আবৃত্ত অংশ নেই।

3.24 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2;

2.78346 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের সংখ্যা 3।

এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 8 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 ও 3 এর ল.সা.গু হলো 6।

প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 6।

∴ 1.7643 = 1.7643000000,

3.24

= 3.2424242424

ও 2.78346 = 2.7834634634

নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ :

1.7643000000, 3.2424249424, 2.7834634634

উদাহরণ– ১৪। 3.89, 2.178 ও 5.89798 যোগ কর।

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 2, 2 ও 3 এর ল.সা.গু 6। প্রথমে তিনটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করা হয়েছে।

3.89 = 3.89898989

2.178 = 2.17878787

5.89798 = 5.89798798

11.97576574 [8 + 8 + 7 + 2 = 25, এখানে 2 হলো হাতের 2। 25 এর 2 যোগ হয়েছে।]

+2

11.97576579

∴ নির্ণেয় যোগফল 11.97576576 বা 11.97576

উদাহরণ– ১৬। 8.243 থেকে 5.24673 বিয়োগ কর।

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। এখন দশমিক সংখ্যা দুটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করা হলো।

8.243 = 8.24343434

5.24643 = 5.24673673

2.99669761 [3 থেকে 6 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে।]

−1

2.99669760

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল 2.99669760।

মন্তব্য : পৌনঃপুনিক বিন্দু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 বিয়োগ করতে হবে।

দ্রষ্টব্য : সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝানোর জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো।

8.243 = 8.24343434 | 34

5.24673 = 5.24673673 | 67

2.99669760 | 67

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল 2.99669760 | 67 এখানে দুটি বিয়োগফলই এক।

উদাহরণ– ১৭। $24.45\dot{6}4\dot{5}$ থেকে $16.4\dot{3}\dot{7}$ বিয়োগ কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned} 24.45\dot{6}4\dot{5} &= 24.45\dot{6}4\dot{5} \\ 16.4\dot{3}\dot{7} &= 16.43\dot{7}4\dot{3} \\ & \quad 8.01902 \end{aligned}$$

[6 থেকে 7 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে।] -1

$$8.01\dot{9}0\dot{1}$$

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল $8.01\dot{9}0\dot{1}$

দ্রষ্টব্য :

$$\begin{aligned} 24.45\dot{6}4\dot{5} &= 24.45645|64 \\ 16.4\dot{3}\dot{7} &= 16.43743|74 \\ & \quad 8.01901|90 \end{aligned}$$

উদাহরণ– ১৯। $0.2\dot{8}$ কে $42.\dot{1}\dot{8}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $0.2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

$42.\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$

$\therefore 0.2\dot{8} \times 42.\dot{1}\dot{8} = \frac{13}{45} \times \frac{464}{11}$

$= \frac{6032}{495} = 12.1\dot{8}\dot{5}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $12.1\dot{8}\dot{5}$

উদাহরণ– ২০। $2.5 \times 4.3\dot{5} \times 1.2\dot{3}\dot{4} =$ কত?

সমাধান : $2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

$4.3\dot{5} = \frac{435-43}{90} = \frac{392}{90}$

$1.2\dot{3}\dot{4} = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$

$\therefore \frac{5}{2} \times \frac{392}{90} \times \frac{611}{495} = \frac{196 \times 611}{8910}$

$= \frac{119756}{8910}$

$= 13.44063......$

∴ নির্ণেয় গুণফল 13.44063

উদাহরণ– ২২। $2.2\dot{7}1\dot{8}$ কে $1.9\dot{1}\dot{2}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : $2.2\dot{7}1\dot{8} = \frac{22718-2}{9999} = \frac{22176}{9999}$

$1.9\dot{1}\dot{2} = \frac{1912-19}{990} = \frac{1893}{990}$

$\therefore 2.2\dot{7}1\dot{8} \div 1.9\dot{1}\dot{2} = \frac{22716}{9999} \div \frac{1893}{990}$

$= \frac{22716}{9999} \times \frac{990}{1893}$

$= \frac{120}{101}$

$= 1.1\dot{8}8\dot{1}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $1.1\dot{8}8\dot{1}$

উদাহরণ– ২৪। 13 এর বর্গমূল বের কর এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান :

```
3 ) 13 ( 3.605551.....
     9
66   | 400
     | 396
7205 | 40000
     | 36025
72105   | 3697500
        | 3605525
7211101    | 9197500
           | 7211101
           | 1986399
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 3.605551.......

এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3.606

উদাহরণ– ২৫। 4.4623845.... দশমিকটির 1, 2, 3, 4 ও 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান ও আসন্ন মান বের কর।

সমাধান : 4.4623846 সংখ্যাটির

এক দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.4

এবং এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.5

দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.46

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.462

এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.462

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত 4.4623

এবং চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন 4.4624

পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.46238

এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46238

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। প্রমাণ কর যে, ক) $\sqrt{5}$ খ) $\sqrt{7}$ গ) $\sqrt{10}$ প্রত্যেকে অমূলদ সংখ্যা।

ক) $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 5 < 9$

$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

বা, $1 < \sqrt{5} < 3$

এখানে, $(1)^2 = 1, (\sqrt{5})^2 = 5, 3^2 = 9.$

সুতরাং $\sqrt{5}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট

অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

∴ $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

মনে করি, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $9 > 1$]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $5q = \frac{p^2}{q}$ [উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $5q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $9 > 1$.

$\therefore$ $5q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $5q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না,

অর্থাৎ $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

খ) $\sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 7 < 9$

$\sqrt{1} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$

বা, $1 < \sqrt{7} < 3$

এখানে, $(1)^2 = 1, (\sqrt{7})^2 = 7, (3)^2 = 9$

সুতরাং $\sqrt{7}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{7}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

$\therefore$ $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

মনে করি, $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

বা, $7 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $7q = \frac{p^2}{q}$ [উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $7q$ পূর্ণসংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $2 > 1$.

$\therefore$ $7q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $7q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{7}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না

অর্থাৎ $\sqrt{7} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

গ) $\sqrt{10}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 10 < 16$

$\therefore$ $\sqrt{1} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$

বা, $1 < \sqrt{10} < 4$

এখানে, $(1)^2 = 1, (\sqrt{10})^2 = 10, (4)^2 = 16$

সুতরাং $\sqrt{10}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট

অতএব, $\sqrt{10}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

মনে করি, $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

বা, $10 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $10q = \frac{p^2}{q}$ [উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $10q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$, পূর্ণ সংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পরস সহ মৌলিক এবং $q > 1$

$\therefore$ $10q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $10q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{10}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না,

অর্থাৎ $\sqrt{10} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore$ $\sqrt{10}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

২। ক) 0.31 এবং 0.12 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি,

একটি সংখ্যা a = 0.301001000100001 ------------

এবং অপর সংখ্যা b = 0.302002000200002 ---------

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয় 0.31 অপেক্ষা ছোট এবং 0.12 অপেক্ষা বড়।

অর্থাৎ, $0.31 > 0.3010010001$ ------------> 0.12

এবং $0.31 > 0.3020020002$ ------------ > 0.12

আবার, a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

a ও b 0.31 এবং 0.12 এর মাঝখানে অবস্থিত।

$\therefore$ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

এভাবে অনেক উত্তর আসবে যার সবই গ্রহণযোগ্য।

খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$

$\sqrt{2} = 1.4142$

$\therefore$ 0.707106 ও 1.4142 এর মাঝখানে একটি মূলদ সংখ্যা a = 0.70717071

[$\because$ কোনো সংখ্যার দশমিকের পরে অসীম পর্যন্ত অংক থাকলে এই অংকগুলো যদি পুনরাবৃত্ত হয় তবে সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা হয়।]

এবং অমূলদ সংখ্যা b = 1.414213562101001

$\therefore$ নির্ণেয় 0.70717071 --- একটি মূলদ সংখ্যা

এবং 1.414213562101001--- একটি অমূলদ সংখ্যা

৪। আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

ক) $\frac{1}{6}$

সমাধান : $\frac{1}{6}$

```
6|10|0.1666
   6
  ---
   40
   36
  ---
   40
   36
  ---
   40
   36
  ---
    4
```

$\therefore$ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $0.1\dot{6}$

খ) $\frac{7}{11}$

সমাধান : $\frac{7}{11}$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 70 \mid 0.63636... \\ & \underline{66} \\ & 40 \\ & \underline{33} \\ & 70 \\ & \underline{66} \\ & 40 \\ & \underline{33} \\ & 70 \\ & \underline{66} \\ & 4 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $0.\dot{6}\dot{3}$

গ) $3\frac{2}{9}$

সমাধান : $3\frac{2}{9}$

$= \frac{29}{9}$

$$\therefore \begin{array}{r|l} 9 & 29 \mid 3.222 --- \\ & \underline{27} \\ & 20 \\ & \underline{18} \\ & 20 \\ & \underline{18} \\ & 20 \\ & \underline{18} \\ & 2 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $3.\dot{2}$

ঘ) $3\frac{8}{15}$

সমাধান : $3\frac{8}{15}$

$= \frac{53}{15}$

$$\therefore \begin{array}{r|l} 15 & 53 \mid 3.5333 --- \\ & \underline{45} \\ & 80 \\ & \underline{75} \\ & 50 \\ & \underline{45} \\ & 50 \\ & \underline{45} \\ & 50 \\ & \underline{45} \\ & 5 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $3.5\dot{3}$

৫। সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

ক) $0.\dot{2}$

সমাধান : $0.\dot{2} = 0.2222$ ----------------

এখানে, $0.\dot{2} \times 10 = 0.222 ------ \times 10 = 2.222$ ----

$0.\dot{2} \times 1 = 0.222 ------ \times 1 = 0.222$ ----

(–) করে $0.\dot{2}(10 - 1) = 2$

বা, $0.\dot{2} \times 9 = 2$

বা, $0.\dot{2} = \frac{2}{9}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{2}{9}$.

খ) $0.\dot{3}\dot{5}$

সমাধান : $0.\dot{3}\dot{5} = 0.353535$ ----------

এখানে, $0.\dot{3}\dot{5} \times 100 = 0.353535 --- \times 100 = 35.3535$ --

এবং $0.\dot{3}\dot{5} \times 1 = 0.353535 --------- \times 1 = 0.3535$ ----

(–) করে $0.\dot{3}\dot{5}(100 - 1) = 35$

বা, $0.\dot{3}\dot{5} \times 99 = 35$

বা, $0.\dot{3}\dot{5} = \frac{35}{99}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{35}{99}$

গ) $0.1\dot{3}$

সমাধান : $0.1\dot{3} = 0.13333$ -------

এখানে, $0.1\dot{3} \times 100 = 0.13333 --- \times 100 = 13.333$ ----

এবং $0.1\dot{3} \times 10 = 0.13333 --- \times 10 = 1.333$ -----

(–) করে, $0.1\dot{3}(100 - 10) = 12$

বা, $0.1\dot{3} \times 90 = 12$

বা, $0.1\dot{3} = \frac{12}{90}$ (কেটে $\frac{2}{15}$)

$= \frac{2}{15}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{2}{15}$.

ঘ) $3.7\dot{8}$

সমাধান : $3.7\dot{8} = 3.7888$ -------

এখানে, $3.7\dot{8} \times 100 = 3.7888 --- \times 100 = 378.888$ ----

এবং $3.7\dot{8} \times 10 = 3.7888 --- \times 10 = 37.888$ ----

(–) করে $3.7\dot{8}\,(100 - 10) = 341$

বা, $3.7\dot{8} \times 90 = 341$

বা, $3.7\dot{8} = \frac{341}{90} = 3\frac{71}{90}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $3\frac{71}{90}$.

ঙ) $6.2\dot{3}0\dot{9}$

সমাধান : $6.2\dot{3}0\dot{9} = 6.2309309$ -----------

এখানে, $6.2\dot{3}0\dot{9} \times 10000 = 6.2309309 --- \times 10000 = 62309.309$ ---

এবং $6.2\dot{3}0\dot{9} \times 10 = 6.2309309 --- \times 10 = 62.309$ ---

(–) করে $6.2\dot{3}0\dot{9}\,(10000 - 10) = 62247$

বা, $6.2\dot{3}0\dot{9} \times 9990 = 62247$

$\therefore \quad 6.2\dot{3}0\dot{9} = \frac{62247}{9990}$

$= 6\frac{2307}{9990}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $6\frac{2307}{9990}$.

৬। সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

ক) $2.\dot{3}, 5.\dot{2}3\dot{5}$

সমাধান : $2.\dot{3}, 5.\dot{2}3\dot{5}$

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 1 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেক দশমিকের পরে অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা হবে 1 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2.

$\therefore$ $2.\dot{3} = 2.3\dot{3}\dot{3}$

$5.\dot{2}3\dot{5} = 5.\dot{2}3\dot{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $2.3\dot{3}\dot{3}$, $5.\dot{2}3\dot{5}$

খ) $7.2\dot{6}, 4.23\dot{7}$

সমাধান : $7.2\dot{6}, 4.23\dot{7}$

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 1, 1 এর ল.সা.গু = 1.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেক দশমিকের পরে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 1.

$\therefore$ $7.2\dot{6} = 7.26\dot{6}$

$4.23\dot{7} = 4.23\dot{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $7.26\dot{6}, 4.23\dot{7}$

গ) $5.\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4}, 6.\dot{2}4\dot{5}$

সমাধান : $5.\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4}, 6.\dot{2}4\dot{5}$

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা = 1, 2, 3 এর ল.সা.গু = 6.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে, প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 0 (শূন্য) এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 6 হবে।

$\therefore$ $5.\dot{7} = 5.\dot{7}7777\dot{7}$

$8.\dot{3}\dot{4} = 8.\dot{3}4343\dot{4}$

$6.\dot{2}4\dot{5} = 6.\dot{2}4524\dot{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ : $5.\dot{7}7777\dot{7}$; $8.\dot{3}4343\dot{4}$ এবং $6.\dot{2}4524\dot{5}$

ঘ) $12.32, 2.1\dot{9}, 4.32\dot{5}\dot{6}$

সমাধান : $12.32, 2.1\dot{9}, 4.32\dot{5}\dot{6}$

এখানে, আবৃত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা = 0, 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে, প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যাও হবে 2।

$\therefore$ $12.32 = 12.3\dot{2}0\dot{0}$

$2.1\dot{9} = 2.19\dot{9}\dot{9}$

$4.32\dot{5}\dot{6} = 4.32\dot{5}\dot{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিকসমূহ $12.3\dot{2}0\dot{0}$; $2.19\dot{9}\dot{9}$, এবং $4.32\dot{5}\dot{6}$

৭। যোগ কর :

ক) $0.4\dot{5} + 0.13\dot{4}$

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1.

$\therefore$ $0.4\dot{5} = 0.45\dot{5}$

$0.13\dot{4} = 0.13\dot{4}$

0.589

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল 0.589

খ) $2.0\dot{5} + 8.0\dot{4} + 7.018$ এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 3

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1. এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1.

$\therefore$ $2.0\dot{5} = 2.055\dot{5}$

$8.0\dot{4} = 8.044\dot{4}$

$7.018 = 7.018\dot{0}$

17.1179

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল 17.1179

গ) $0.00\dot{6} + 0.\dot{9}\dot{2} + 0.0\dot{1}3\dot{4}$

সমাধান : এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 2, 3। এদের ল.সা.গু = 6.

$\therefore$ $0.00\dot{6} = 0.00\dot{6}6666\dot{6}$

$0.\dot{9}\dot{2} = 0.92\dot{9}2929\dot{2}$

$0.0\dot{1}3\dot{4} = 0.01\dot{3}4134\dot{1}$

$= 0.94937299$

$+1$

0.94937300

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল 0.94937300

৮। বিয়োগ কর :

ক) $3.\dot{4} - 2.1\dot{3}$

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যাও 1.

$\therefore$ $3.\dot{4} = 3.4\dot{4}$

এবং $2.1\dot{3} = 2.1\dot{3}$

$1.3\dot{1}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $1.3\dot{1}$.

খ) $5.\dot{1}\dot{2} - 3.4\dot{5}$

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

$\therefore$ $5.\dot{1}\dot{2} = 5.1\dot{2}\dot{1}$

$3.4\dot{5} = 3.4\dot{5}\dot{5}$

1.666

-1

$1.6\dot{6}\dot{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $1.6\dot{6}\dot{5}$.

মন্তব্য : পৌন:পুনিক বিন্দু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অংক থেকে 1 বিয়োগ করতে হয়।

গ) $8.49 - 5.3\dot{5}\dot{6}$

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যাও 2.

$\therefore$ $8.49 = 8.4\dot{9}0\dot{0}$

$5.3\dot{5}\dot{6} = 5.35\dot{6}\dot{5}$

$= 3.1335$

-1

$3.13\dot{3}\dot{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $3.13\dot{3}\dot{4}$

ঘ) $19.34\dot{5} - 13.2\dot{3}4\dot{9}$

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 3 এর ল.সা.গু =3.

$\therefore$ $19.34\dot{5} = 19.34\dot{5}5\dot{5}$

$13:2\dot{3}4\dot{9} = 13.23\dot{4}9\dot{3}$

$6.11\dot{0}6\dot{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $6.11\dot{0}6\dot{2}$

৯। গুণ কর :

ক) $0.\dot{3}\times 0.\dot{6}$

সমাধান : এখানে, $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$ এবং $0.\dot{6}=\frac{6}{9}$

এখন, $0.\dot{3}\times 0.\dot{6}=\frac{3}{9}\times\frac{6}{9}$

$=\frac{2}{9}=0.\dot{2}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $0.\dot{2}$.

খ) $2.\dot{4}\times 0.\dot{8}\dot{1}$

সমাধান : এখানে, $2.\dot{4}=\frac{24-2}{9}=\frac{22}{9}$ এবং $0.\dot{8}\dot{1}=\frac{81}{99}$

এখন, $2.\dot{4}\times 0.\dot{8}\dot{1}=\frac{22}{9}\times\frac{81}{99}$

$=2$

∴ নির্ণেয় গুণফল 2

গ) $0.6\dot{2}\times 0.\dot{3}$

সমাধান : এখানে, $0.6\dot{2}=\frac{62-6}{90}=\frac{56}{90}$ এবং $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$

এখন, $0.6\dot{2}\times 0.\dot{3}=\frac{56}{90}\times\frac{3}{9}$

$=\frac{28}{135}$

$=0.2\dot{0}7\dot{4}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $0.2\dot{0}7\dot{4}$

ঘ) $42.\dot{1}\dot{8}\times 0.2\dot{8}$

সমাধান : এখানে, $42.\dot{1}\dot{8}=\frac{4218-42}{99}=\frac{4176}{99}$

এবং $0.2\dot{8}=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}$

এখন, $42.\dot{1}\dot{8}\times 0.2\dot{8}=\frac{4176}{99}\times\frac{26}{90}$

$=\frac{6032}{495}$

$=12.1\dot{8}\dot{5}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $12.1\dot{8}\dot{5}$

১০। ভাগ কর :

ক) $0.\dot{3}\div 0.\dot{6}$

সমাধান : এখানে, $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$ এবং $0.\dot{6}=\frac{6}{9}$

এখন, $\frac{3}{9}\div\frac{6}{9}=\frac{3}{9}\times\frac{9}{6}$

$=\frac{1}{2}=0.5$

∴ নির্ণেয় ভাগফল 0.5

খ) $0.3\dot{5}\div 1.\dot{7}$

সমাধান : এখানে, $0.3\dot{5}=\frac{35-3}{90}=\frac{32}{90}$

এবং $1.\dot{7}=\frac{17-1}{9}=\frac{16}{9}$

এখন, $\frac{32}{90}\div\frac{16}{9}$

$=\frac{32}{90}\times\frac{9}{16}$

$=\frac{1}{5}$

$=0.2$

∴ নির্ণেয় ভাগফল 0.2

গ) $2.3\dot{7}\div 0.4\dot{5}$

সমাধান : এখানে, $2.3\dot{7}=\frac{237-23}{90}=\frac{214}{90}$

এবং $0.4\dot{5}=\frac{45-4}{90}=\frac{41}{90}$

এখন, $2.3\dot{7}\div 0.4\dot{5}=\frac{214}{90}\div\frac{41}{90}$

$=\frac{214}{90}\times\frac{90}{41}$

$=\frac{214}{41}$

$=5.\dot{2}195\dot{1}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $=5.\dot{2}195\dot{1}$

ঘ) $1.\dot{1}8\dot{5}\div 0.\dot{2}\dot{4}$

সমাধান : এখানে, $1.\dot{1}8\dot{5}=\frac{1185-1}{999}=\frac{1184}{999}$

এবং $0.\dot{2}\dot{4}=\frac{24}{99}$

এখন, $1.\dot{1}8\dot{5}\div 0.\dot{2}\dot{4}=\frac{1184}{999}\div\frac{24}{99}$

$=\frac{1184}{999}\times\frac{99}{24}$

$=\frac{1628}{333}=4.\dot{8}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $4.\dot{8}$

১১। বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূলগুলোর আসন্ন মান লেখ :

ক) 12

সমাধান : 12 এর বর্গমূল = $\sqrt{12}$

ভাজক	ভাজ্য	ভাগফল
3	12000000	3.464
	9	
64	300	
	256	
684	4400	
	4116	
6924	28400	
	27696	
	704	

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 3.464
এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3.46

খ) $0.\dot{2}\dot{5}$

সমাধান : $0.\dot{2}\dot{5}$ এর বর্গমূল = $\sqrt{0.\dot{2}\dot{5}}$

$0.\dot{2}\dot{5} = 0.252525$ --------

ভাজক	ভাজ্য	ভাগফল
0.5	0.252525 ---	0.5025
	25	
1002	2525	
	2004	
10045	52125	
	50225	
	1900	

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 0.502
এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 0.50

গ) $1.3\dot{4}$

সমাধান : $1.3\dot{4}$ এর বর্গমূল = $\sqrt{1.3\dot{4}}$

∴ $1.3\dot{4} = 1.34444$ ---------

ভাজক	ভাজ্য	ভাগফল
1	1.34444 ----	1.159
	1	
21	34	
	21	
225	1344	
	1125	
2309	21944	
	20781	
	1163	

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 1.159
এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 1.16

ঘ) $5.1\dot{3}0\dot{2}$

সমাধান : $5.1\dot{3}0\dot{2}$ এর বর্গমূল = $\sqrt{5.1\dot{3}0\dot{2}}$

∴ $5.1\dot{3}0\dot{2} = 5.1302302302$ -------

ভাজক	ভাজ্য	ভাগফল
2	5.13023023 ---	2.265
	4	
42	113	
	84	
446	2902	
	2676	
4525	22630	
	22625	
	5	

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 2.265
এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 2.27

১২। নিচের কোন সংখ্যাগুলো মূলদ এবং কোন সংখ্যাগুলো অমূলদ লেখ :

ক) $0.\dot{4}$

সমাধান : $0.\dot{4}$
$= \frac{4}{9}$
∴ সংখ্যাটি মূলদ

খ) $\sqrt{9}$

সমাধান : $\sqrt{9} = \sqrt{(3)^2} = 3$
∴ সংখ্যাটি মূলদ

গ) $\sqrt{11}$

সমাধান : $\sqrt{11}$
$= 3.31662$ -----
∴ সংখ্যাটি অমূলদ

ঘ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

সমাধান : $\frac{\sqrt{6}}{3}$
$= \frac{\sqrt{3 \times 2}}{3} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3}$
$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
∴ সংখ্যাটি অমূলদ

ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

সমাধান : $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$
$= \frac{\sqrt{2 \times 4}}{\sqrt{7}}$
$= \frac{2\sqrt{2}}{7}$
∴ সংখ্যাটি অমূলদ

চ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$

সমাধান : $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$
$= \frac{\sqrt{3 \times 9}}{\sqrt{3 \times 16}}$
$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{9}}{\sqrt{3}\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$
∴ সংখ্যাটি অমূলদ

ঘ) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}}$

সমাধান: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{9}$

$= 1.\dot{6}3\dot{8}$

∴ সংখ্যাটি মূলদ

ঙ) $5.6\dot{3}\dot{9}$

সমাধান: $5.6\dot{3}\dot{9}$

$= \frac{5639 - 5}{999}$

$= \frac{5634}{999}$

∴ সংখ্যাটি মূলদ

১৩। সরল কর :

ক) $(0.\dot{3} \times 0.8\dot{3}) + (0.5 \times 0.1) + 0.3\dot{5} + 0.0\dot{8}$

সমাধান: $(0.\dot{3} \times 0.8\dot{3}) \div (0.5 \times 0.1) + 0.3\dot{5} \div 0.0\dot{8}$

$= \left(\frac{3}{9} \times \frac{83-8}{90}\right) \div \left(\frac{5}{10} \times \frac{1}{9}\right) + \frac{35-3}{90} \div \frac{8-0}{90}$

$= \left(\frac{3}{9} \times \frac{75}{90}\right) \div \left(\frac{5}{90}\right) + \frac{32}{90} \div \frac{8}{90}$

$= \frac{5}{18} \div \frac{1}{18} + \frac{16}{45} \div \frac{4}{45}$

$= \frac{5}{18} \times \frac{18}{1} + \frac{16}{45} \times \frac{45}{4}$

$= 5 + 4 = 9$

∴ নির্ণেয় সরল মান 9

খ) $[(6.27 \times 0.5) + \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] + \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.3) \times 0.5]$

সমাধান: $[(6.27 \times 0.5) \div \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] \div \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.3) \times 0.5]$

$= \left[\left(\frac{627}{100} \times \frac{5}{10}\right) \div \left\{\left(\frac{5}{10} \times \frac{75}{100}\right) \times \frac{836}{100}\right\}\right] \div \left\{\left(\frac{25}{100} \times \frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{75}{100} \times \frac{213}{10}\right) \times \frac{5}{10}\right\}$

$= \left[\frac{627}{200} \div \left\{\frac{75}{200} \times \frac{836}{100}\right\}\right] \div \left\{\frac{5}{200} \times \frac{3195}{200} \times \frac{1}{2}\right\}$

$= \left[\frac{627}{200} \div \frac{627}{200}\right] \div \left\{\left(\frac{1}{40} \times \frac{639}{40}\right) \times \frac{1}{2}\right\}$

$= \left[\frac{627}{200} \times \frac{200}{627}\right] \div \left\{\left(\frac{639}{1600} \times \frac{1}{2}\right)\right\}$

$= 1 \div \left(\frac{639}{3200}\right)$

$= 1 \times \frac{3200}{639}$

$= \frac{3200}{639} = \frac{3200}{639}$

$= 5.007$

∴ নির্ণেয় সরল মান 5.

১৪। $\sqrt{5}$ ও 4 দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

ক) কোনটি মূলদ ও কোনটি অমূলদ নির্দেশ কর।

খ) $\sqrt{5}$ ও 4 এদের মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ) প্রমান কর যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান:

ক) এখানে, $\sqrt{5} = 2.36067$ -----

∴ $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

এবং 4 একটি মূলদ সংখ্যা।

খ) এখানে, $\sqrt{5} = 2.236067$ --------

মনে করি, a = 3.202002000 -------

এবং b = 3.505005000 ....

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{5}$ অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ, $\sqrt{5} < 3.202002000 .... < 4$

এবং $\sqrt{5} < 3.50500500 ...... < 4$

∴ a ও b–ই নির্ণেয় দুইটি অমূলদ সংখ্যা।

গ) আমরা জানি, $1 < 5 < 9$

∴ $\sqrt{1} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

বা, $1 < \sqrt{5} < 3$

এখানে, $(1)^2 = 1, (\sqrt{5})^2 = 5$ এবং $(3)^2 = 9$

সুতরাং $\sqrt{5}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট

অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

∴ $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা যদি $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা হয়।

তাহলে, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$

[যেখানেস p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং 2 > 1]

বা, $(\sqrt{5})^2 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$

বা, $5q = \frac{p^2}{q}$ [q দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে]

স্পষ্টত : 5q পূর্ণ সংখ্যাকা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং q > 1.

∴ 5q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না

অর্থাৎ $5q \neq \frac{p^2}{q}$

∴ $\sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারে কোন সংখ্যা হতে পারে না,

অর্থাৎ, $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$

অতএব, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. a, b, c বাস্তব সংখ্যা a < b এবং c < 0 হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক ac = bc খ ac > bc গ ac < bc ঘ ac ≯ bc ⓖ

২. $0.1\dot{3}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে? [ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $\frac{13}{90}$ খ $\frac{13}{99}$ গ $\frac{2}{15}$ ঘ $\frac{4}{33}$ ⓖ

৩. নিচের কোনটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ? [ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক 1.4142135 খ 2.1356124 গ 2.282471 ঘ 5.12765765 ⓖ

৪. মৌলিক সংখ্যা সেটের ক্ষুদ্রতম সদস্য কোনটি? [ডা. খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]
ক ১ খ ২ গ ৩ ঘ ৪ ⓚ

৫. $0.\dot{9}$ এর মান কোনটি? [ঢাকা রেসিডেন্সিয়াল মডেল]
ক $\frac{9}{10}$ খ $\frac{1}{9}$ গ $\frac{1}{6}$ ঘ 1 ⓖ

৬. নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা? [ঢাকা রেসিডেন্সিয়াল মডেল]
ক $\sqrt{0.25}$ খ $\sqrt{0.35}$ গ $\sqrt{0.9}$ ঘ $\sqrt{0.10}$ ⓚ

৭. গণনাকারী সংখ্যার অপর নাম কী? [বি বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক মূলদ সংখ্যা খ অমূলদ সংখ্যা গ স্বাভাবিক সংখ্যা ঘ বাস্তব সংখ্যা ⓖ

৮. নিচের কোনটি অমূলদ সংখ্যা? [বি বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক 3.415 খ $\frac{5}{9}$ গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{9}}{4}$ ⓖ

৯. $1.\dot{3}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করলে কত হবে? [বি বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $\frac{7}{3}$ খ $\frac{5}{3}$ গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{2}{3}$ ⓖ

১০. 0.5 এর $0.1\dot{9}$ = কত? [বি বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $\frac{5}{8}$ খ $\frac{7}{9}$ গ $\frac{1}{9}$ ঘ $\frac{3}{5}$ ⓖ

১১. $0.\dot{2}\dot{4}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে কত হয়? [বি বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট
ক $\frac{8}{33}$ খ $\frac{8}{13}$ গ $\frac{8}{23}$ ঘ $\frac{8}{43}$ ⓚ

সেট ও ফাংশন

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সেট ও উপসেটের ধারণা ব্যাখ্যা করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবে।
- সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবে।
- অসীম সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সসীম ও অসীম সেটের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সেটের সংযোগ ও ছেদ ব্যাখ্যা এবং যাচাই করতে পারবে।
- শক্তি সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দুই ও তিন সদস্যবিশিষ্ট সেটের শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উদাহরণ ও ভেনচিত্রের সাহায্যে সেট প্রক্রিয়ার সহজ বিধিগুলো প্রমাণ করতে পারবে এবং বিধিগুলো প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে ও গঠন করতে পারবে।
- ডোমেন ও রেঞ্জ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

সেট :

আধুনিক গণিতের হাতিয়ার হিসেবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪ – ১৯১৮) সেট সম্বন্ধে প্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন। তিনি অসীম সেটের যে ধারণা প্রদান করেন তা গণিত শাস্ত্রে বিপুল আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয়, তা সেট তত্ত্ব (Set Theory) হিসেবে পরিচিত।
"বাস্তব জগত এবং চিন্তা জগতের বস্তুসমূহের যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহই সেট।" সেটের সদস্য সংখ্যা সসীম বা অসীম হতে পারে। এই সদস্যসমূহ অন্তত একটি শর্ত দ্বারা পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

কতিপয় বিশেষ ধরনের সেট এবং এদের সংজ্ঞা :

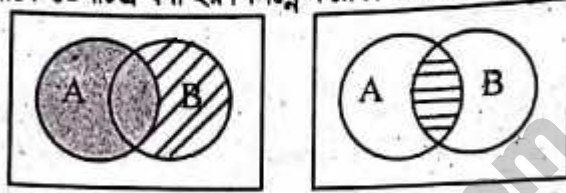
- **সসীম সেট :** যে সেটের উপাদান সংখ্যা নির্দিষ্ট তাকে সসীম সেট বলে। যেমন, $A = \{2, 5, 6\}$ সেটটির উপাদান সংখ্যা 3। সুতরাং এটি একটি সসীম সেট।
- **অসীম সেট :** যে সেটের উপাদান সংখ্যা অসীম(নির্দিষ্ট নয় বা গণনা করা যায় না) তাকে অসীম সেট বলে। যেমন, সকল জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, \ldots\ldots\}$ একটি অসীম সেট। কারণ এর উপাদান সংখ্যা অসীম।
- **ফাঁকা সেট :** যে সেটের কোনো উপাদান নেই অর্থাৎ উপাদান সংখ্যা শূন্য তাকে ফাঁকা সেট বলে। যেমন, 24 এবং 28 এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যার সেট একটি ফাঁকা সেট। কারণ 24 এবং 28 এর মধ্যে কোনো মৌলিক সংখ্যা নেই। ফাঁকা সেটকে { } অথবা প্রতীক দ্বারা লেখা হয়।
- **উপসেট :** A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান থাকলে A কে B এর উপসেট বলে। একে $A \subset B$ আকারে লেখা হয়। যেমন,
  $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $B = \{2, 4, 6, 8\}$ হলে A, B এর একটি উপসেট বা $A \subset B$
- **প্রকৃত উপসেট :** যদি একটি সেট A থেকে একাধিক নতুন সেট পাওয়া যায় এবং মূল সেট A তে অন্তত একটি উপাদান থাকে যা প্রাপ্ত নতুন সেটগুলোতে নেই, তবে প্রাপ্ত সেটগুলোকে মূল সেট A এর প্রকৃত উপসেট বলে।
  অতএব, A নিজে A এর প্রকৃত উপসেট নয়।
- **সার্বিক সেট :** আলোচনাধীন সকল সেট কোনো নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হলে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে সার্বিক সেট বলে। একে U প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- **সংযোগ সেট :** দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলে। এই ক্ষেত্রে কোন উপাদানকেই পুনরাবৃত্তি না করে শুধু একবার লেখা হয়। যেমন,
  $A = \{1, 3\}$ এবং $B = \{3, 5\}$ হলে A ও B এর সংযোগ সেট $C = \{1, 3, 5\}$। একে $C = A \cup B$ আকারে লেখা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B বা A union B.
- **ছেদ সেট :** দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে। A ও B এর ছেদ সেট C হলে, $C = A \cap B$. একে C = A intersection B পড়া হয়।
  $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{3, 5, 7\}$ হলে এদের ছেদ সেট $C = A \cap B = \{3, 5\}$
- **নিশ্ছেদ সেট :** দুটি সেটের কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে তাদের নিশ্ছেদ সেট বলে। যেমন, $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$ হলে, এ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট। দুটি নিশ্ছেদ সেটের ছেদ সেট হলো একটি ফাঁকা সেট।

❖ **পূরক সেট :** দুটি সেট A এবং B যদি এমন হয় যে A এর যেসব উপাদান B এর উপাদান নয়, তবে উক্ত উপাদানসমূহ নিয়ে গঠিত সেটকে A এর প্রেক্ষিতে B এর পূরক সেট বলে। একে A\B আকারে প্রকাশ করা হয়।
যদি A = {2, 4, 6, 8} এবং B = {2, 4} হয়, তবে B এর পূরক সেট
$B' = A - B = \{2, 4, 6, 8\} - \{2, 4\} = \{6, 8\}$ [এখানে B এর উপাদানগুলো বাদে A এর সব উপাদান]

❖ **পাওয়ার সেট :** মনে করি, A একটি সেট। A সেটের যতগুলো উপসেট হয়, তাদের সেটকে A সেটের পাওয়ার সেট বলে এবং লেখা হয় P(A)।
A-এর উপাদান সংখ্যা n হলে, P(A) এর উপাদান সংখ্যা 2^n. যেমন– কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা 4 হলে এর উপসেট সংখ্যা হবে $2^4 = 16$.

❖ **কার্তেসীয় গুণজ :** দুটি সেট যেমন, A = {a, b} এবং B = {x, y} হলে, A এবং B- এর কার্তেসীয় গুণজ
$A \times B = \{a, b\} \times \{x, y\} = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$

❖ **দুইটি সেটের তুলনা :** দুইটি সেট যেমন, A = (a, b) এবং B = (x, y) সমান হলে,
অর্থাৎ (a, b) = (x, y) হলে, a = x, b = y হবে।

❖ **ভেনচিত্র :** কোনো সেটের একাধিক উপসেটের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করতে যে জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করা হয়, তাকে ভেনচিত্র বলে।
ব্রিটিশ তর্কশাস্ত্রবিদ জন ভেন (১৮৩৪ – ১৮৮৩) কতিপয় জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার সেটের মধ্যকার সম্পর্ক স্থাপন করেন। তাঁর নাম অনুসারে এগুলোকে ভেনচিত্র বলা হয়। নিম্নে কয়েকটি ভেনচিত্র দেখানো হলো :

$A \cup B$ হলো, গাঢ় অংশটুকু

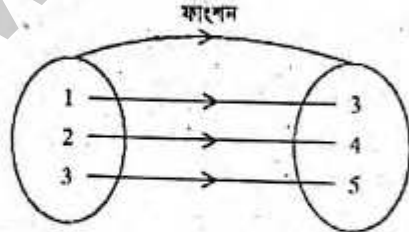
$A \cap B$ হলো, গাঢ় অংশটুকু

একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট U এবং দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা A ও B সেট চিহ্নিত করা হয়েছে। এতে সার্বিক সেট চারটি এলাকায় বিভক্ত হলো যাদের a, b, c, d দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

❖ **বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য :** একটি পূর্ণ সংখ্যাকে অন্যভাবে মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায়। যেমন–

$30 = 2 \times 3 \times 5$
$42 = 2 \times 3 \times 7$

❖ **অন্বয় :** যদি A ও B দুইটি সেট হয় তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ A × B সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এখানে, R সেট A× B সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ, $R \subseteq A \times B$

❖ **ফাংশন :** নিচের A ও B সেটের অন্বয় লক্ষ করি :

এখানে, যখন y = x + 2 , তখন x = 1 হলে, y = 3
x = 2 হলে, y = 4
x = 3 হলে, y = 5

অর্থাৎ x এর এক–একটি মানের জন্য y এর মাত্র একটি মান পাওয়া যায় এবং x ও y –এর মধ্যে সম্পর্ক তৈরি হয় y = x + 2 দ্বারা। সুতরাং দুইটি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। x এর ফাংশনকে সাধারণত y, f (x), g(x), F(x) ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি, $y = x^2 - 2x + 3$ একট ফাংশন। এখানে, x এর যে কোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাবে। এখানে, x এবং y উভয়ই চলক তবে, x এর মানের উপর y এর মান নির্ভরশীল। কাজেই x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং y হচ্ছে অধীন চলক।

❖ **ডোমেন ও রেঞ্জ**

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।
মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times B$, R এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান সেট হবে R এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট হবে R এর রেঞ্জ। R এর ডোমেনকে ডোম R এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ R লিখে প্রকাশ করা হয়।

অনুশীলনী- ২.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-১ : $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। [পৃষ্ঠা- ২২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$
C সেটের উপাদানসমূহ $-9, -6, -3, 3, 6, 9$
এখানে প্রত্যেকটি উপাদান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং পূর্ণসংখ্যা।
∴ নির্ণেয় সেট, $C = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $-9 \leq x^2 < 100\}$ (Ans.)

কাজ-২: $Q = \{y : y$ পূর্ণসংখ্যা এবং $y^3 \leq 27\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। [পৃষ্ঠা- ২২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $Q = \{y : y$ পূর্ণসংখ্যা এবং $y^3 \leq 27\}$
পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

$y = 0$ হলে $y^3 = 0^3 = 0$, যা 27 থেকে ছোট
$y = 1$ " $y^3 = (1)^3 = 1$, " " "
$y = -1$ " $y^3 = (-1)^3 = -1$, " "
$y = 2$ " $y^3 = (2)^3 = 8$, " " "
$y = -2$ " $y^3 = (-2)^3 = -8$, " "
$y = 3$ " $y^3 = (3)^3 = 27$, যা 27 এর সমান
$y = -3$ " $y^3 = (-3)^3 = -27$, যা 27 এর ছোট
$y = 4$ " $y^3 = (4)^3 = 64$, যা 27 এর বড়
$y = -4$ " $y^3 = (-4)^3 = -64$, যা 27 এর ছোট

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী নির্ণেয় সেট, $Q = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

কাজ -৩: নিচের সেটগুলো থেকে সসীম সেট ও অসীম সেট লেখ : [পৃষ্ঠা- ২২]

১। $\{3, 5, 7\}$

সমাধান : মনে করি, $A = \{3, 5, 7\}$
এখানে A সেটে 3টি উপাদান আছে।
আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে সসীম সেট বলে ।
এখানে A সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত এবং গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।
সুতরাং A সেটটি একটি সসীম সেট।.

২। $\{1, 2, 2^2, ... 2^{10}\}$

সমাধান : মনে করি, $B = \{1, 2, 2^2, ... 2^{10}\}$
আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে অসসীম সেট বলে।
এখানে B সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত এবং গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।
∴ B সেটটি একটি সসীম সেট।

৩। $\{3, 3^2, 3^3, ...\}$

সমাধান : মনে করি, $C = \{3, 3^2, 3^3, ...\}$
আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, তাকে অসীম সেট বলে।
এখানে, C সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত নয় অর্থাৎ অসীম
∴ C সেটটি একটি অসীম সেট।

৪। $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$
আমরা জানি, পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
প্রদত্ত সেট দেখা যাচ্ছে পূর্ণ সংখ্যাগুলো নির্ধারিত নয়, অর্থাৎ 4 থেকে ছোট সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট।
4 থেকে ছোট পূর্ণসংখ্যার সেট $= \{.... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
∴ প্রদত্ত সেটটি একটি অসীম সেট।

৫। $\left\{\frac{p}{q} : p\right.$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $\left.q > 1\right\}$

সমাধান : দেওয়া আছে,
$\left\{\frac{p}{q} : p\right.$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $\left.q > 1\right\}$
আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না তাকে অসীম সেট বলে।
প্রদত্ত সেটটি একটি মূলদ সংখ্যার সেট এবং এ প্রদত্ত সেটের উপাদানগুলো অসীম অর্থাৎ গণনা করে শেষ করা যায় না।
∴ প্রদত্ত সেটটি একটি অসীম সেট।

৬। $\{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$.

সমাধান : মনে করি, $A = \{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$
আমরা জানি,
স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 100 থেকে ছোট এবং ঘন 100 থেকে বড় তাদের সেট।
A সেটটিতে দেখা যাচ্ছে 100 থেকে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো গণনা করা গেলেও 100 থেকে বড় স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো গণনা করে শেষ করা যাবে না।
∴ A সেটটি একটি অসীম সেট।

কাজ-৪: $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $E = \{1, 5, 9\}$ এবং $F = \{3, 7, 11\}$ হলে $E^c \cup F^c$ এবং $E^c \cap F^c$ নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$E = \{1, 5, 9\}$
$F = \{3, 7, 11\}$

এখানে, $E^c = U \setminus E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{1, 5, 9\}$
$= \{3, 7, 11\}$
$F^c = U \setminus F = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{3, 7, 11\}$
$= \{1, 5, 9\}$
∴ $E^c \cup F^c = \{3, 7, 11\} \cup \{1, 5, 9\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (Ans.)
এবং $E^c \cap F^c = \{3, 7, 11\} \cap \{1, 5, 9\}$
$= \Phi$ (Ans.)

কাজ-৫: $G = \{1, 2, 3\}$ হলে, $P(G)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে। [পৃষ্ঠা-২৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $G = \{1, 2, 3\}$

G সেটের সকল উপসেট–ই হলো P(G) এর উপাদান।

∴ P(G) = {{1, 2, 3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1}, {2}, {3}, Φ}

এখানে, P(G) এর উপাদান সংখ্যা = 8

G সেটের উপাদান সংখ্যা n = 3

এবং P(G) সেটের উপাদান সংখ্যার = 8 = $2^3 = 2^n$

∴ P(G) এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে। (দেখানো হলো)

কাজ–৬: $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৭]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$

ক্রমজোড়ের সংজ্ঞানুসারে,

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$ .... (i)

এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণকে $\frac{1}{2}$ ও (ii) নং সমীকরণকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$\frac{x}{4}+\frac{y}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{9}+\frac{y}{6} = \frac{1}{3}$

(–) $\frac{x}{4}-\frac{x}{9} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

বা, $\frac{9x-4x}{36} = \frac{3-2}{6}$

বা, $\frac{5x}{36} = \frac{1}{6}$

বা, $5x \times 6 = 36$

বা, $x = \frac{36}{5\times 6}$

বা, $x = \frac{6}{5}$

সমীকরণ (i) এ $x = \frac{6}{5}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{\frac{6}{5}}{2}+\frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{3}{5}+\frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{y}{3} = 1-\frac{3}{5}$

বা, $\frac{y}{3} = \frac{5-3}{5}$

বা, $\frac{y}{3} = \frac{2}{5}$

বা, $5y = 6$

∴ $y = \frac{6}{5}$

∴ নির্ণেয় $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$

কাজ–৭: P = {1, 2, 3}, Q = {3, 4} এবং R = {x, y} হলে, (P ∩ Q) × R এবং (P ∩ Q) × Q নির্ণয় কর।

সমাধান: P = {1, 2, 3}, Q = {3, 4} এবং R = {x, y} হলে, (P ∩ Q) × R এবং (P ∩ Q) × Q মান নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, (P ∩ Q) = {1, 2, 3} ∩ {3, 4} = {3}

∴ (P ∩ Q) × R = {3} × {x, y}
= {(3, x), (3, y)} **(Ans.)**

আবার, P ∩ Q = {1, 2, 3} ∩ {3,4 } = {3}

∴ (P ∩ Q) × Q = {3} × {3, 4}
= {(3, 3), (3, 4)} **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ১। A = {7, 14, 21, 28} সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, A = {7, 14, 21, 28}

A সেটের উপাদানসমূহ 7, 14, 21, 28

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 7 দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ 7 এর গুণিতক এবং 28 এর বড় নয়।

∴ A = {x : x, 7 এর গুণিতক এবং x ≤ 28}

উদাহরণ– ২। B = {x : x, 28 এর গুণনীয়ক} সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, B = {x : x, 28 এর গুণনীয়ক}

এখানে, 28 = 1 × 28 = 2 × 14 = 4 × 7

∴ 28 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 4, 7, 14, 28

∴ নির্ণেয় সেট, B = {1, 2, 4, 7, 14, 28}

উদাহরণ– ৩। C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং x^2 < 18} সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং x^2 < 18}

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3, 4, 5, ...

এখানে, x = 1 হলে, $x^2 = 1^2 = 1$

x = 2 হলে, $x^2 = 2^2 = 4$

x = 3 হলে, $x^2 = 3^2 = 9$

x = 4 হলে, $x^2 = 4^2 = 16$

x = 5 হলে, $x^2 = 5^2 = 25$; যা 18 এর চেয়ে বড়

∴ শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3, 4

∴ নির্ণেয় সেট, C = {1, 2, 3, 4}.

উদাহরণ– ৪। দেখাও যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

সমাধান: দেখাতে হবে যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}

N সেট থেকে বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ নিয়ে গঠিত সেট $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
জোড় " " " " $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$
3 এর গুণিতকসমূহের সেট $C = \{3, 6, 9, 12, ...\}$ ইত্যাদি।
এখানে, N সেট থেকে গঠিত A, B, C সেটসমূহের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না। ফলে A, B, C অসীম সেট।
∴ N একটি অসীম সেট। (দেখানো হলো)

উদাহরণ– ৫। $P = \{x, y, z\}$ এর উপসেটগুলো লেখ এবং উপসেটগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$
P এর উপসেটসমূহ $\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \Phi$.
P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ৬। $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়কসমূহ$\}$ এবং $Q = \{x : x$, 3 এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$ হলে $P - Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়কসমূহ$\}$
এখানে, 12 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 3, 4, 6, 12
∴ $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
আবার, $Q = \{x : x$, 3 এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$
এখানে, 12 পর্যন্ত 3 এর গুণিতকসমূহ 3, 6, 9, 12
∴ $Q = \{3, 6, 9, 12\}$
∴ $P - Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$
∴ নির্ণেয় সেট : $\{1, 2, 4\}$

উদাহরণ– ৭। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ হলে A^c ও B^c নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 5\}$
এবং $B^c = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$
∴ নির্ণেয় সেট $A^c = \{1, 3, 5\}$ এবং $B^c = \{2, 4, 6, 7\}$

উদাহরণ– ৮। $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$ হলে $C \cup D$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$
∴ $C \cup D = \{3, 4, 5\} \cup \{4, 6, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 8\}$
∴ নির্ণেয় সেট $\{3, 4, 5, 6, 8\}$

C D
3 5 | 4 | 6 8
C∪D

উদাহরণ– ৯। $P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\}$ এবং $Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যার এবং $x \leq 8\}$ হলে, $P \cap Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$
এবং $Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$
∴ $P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 6\}$
∴ নির্ণেয় সেট $\{4, 6\}$

P Q
4 6
P∩Q

উদাহরণ– ১০। $A = \Phi$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$ তিনটি সেট। দেখাও যে, কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ঐ সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n হবে।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \Phi$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$
এখানে, $P(A) = \Phi$
∴ A সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য এবং এর শক্তি সেটের উপাদান হলো $= 1 = 2^0$
আবার, $P(B) = \{(a), \Phi\}$
∴ B সেটের উপাদান সংখ্যা 1 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2 = 2^1$
এবং $P(C) = \{(a, b), (a), (b), \Phi\}$
∴ C সেটের উপাদান সংখ্যা 2 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $= 4 = 2^2$
সুতরাং, কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ঐ সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n হবে।

উদাহরণ– ১১। $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$
ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ .... (1)
এবং $x - y = 3$ .... (2)
সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই, $2x + y = 6$
$x - y = 3$
$3x = 9$ বা $x = 3$
সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $6 + y = 6$
বা $y = 0$
∴ $(x, y) = (3, 0)$
∴ নির্ণেয় মান (3, 0)

উদাহরণ– ১২। $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 4\}$ এবং $R = P \cap Q$ হলে $P \times R$ এবং $R \times Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 4\}$ এবং $R = P \cap Q$ হলে $P \times R$ এবং $R \times Q$ নির্ণয় করতে হবে।
দেওয়া আছে, $P = \{1, 2, 3\}$ এবং $Q = \{3, 4\}$
এবং $R = P \cap Q = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$
∴ $P \times R = \{1, 2, 3\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$
এবং $R \times Q = \{3\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4)\}$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ১৩। যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে তাদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যা হবে 23 অপেক্ষা বড় এবং $311 - 23 = 288$ এবং $419 - 23 = 396$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।
মনে করি, 23 অপেক্ষা বড় 288 এর গুণনীয়কসমূহের সেট A
এবং 396 এর গুণনীয়কসমূহের সেট B
এখানে, $288 = 1 \times 288 = 2 \times 144 = 3 \times 96 = 4 \times 72 = 6 \times 48 = 8 \times 36 = 9 \times 32 = 12 \times 24 = 16 \times 18$
∴ $A = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288\}$
আবার, $396 = 1 \times 396 = 2 \times 198 = 3 \times 132 = 4 \times 99 = 6 \times 66 = 9 \times 44 = 11 \times 36 = 12 \times 33 = 18 \times 22$
∴ $B = \{33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396\}$
∴ $A \cap B = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288\} \cap \{33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396\} = \{36\}$
∴ নির্ণেয় সেট $\{36\}$ **(Ans.)**

উদাহরণ–১৪। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ এবং $C = \{4, 5, 6, 7\}$ হলে, দেখাও যে, (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং (ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

সমাধান (i) চিত্রে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা U এবং পরস্পরছেদী দুটি বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা যথাক্রমে A, B সেটকে নির্দেশ করা হলো।

সেট	উপাদান
$A \cup B$	1, 2, 3, 5, 6, 7
$(A \cup B)'$	4, 8
A'	3, 4, 5, 8
B'	1, 4, 7, 8
$A' \cup B'$	4, 8

$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$ (দেখানো হলো)

(ii) চিত্রে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা U এবং পরস্পরছেদী তিনটি বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা যথাক্রমে A, B, C সেটকে নির্দেশ করা হলো।

লক্ষ করি,

সেট	উপাদান
$A \cap B$	2, 6
$(A \cap B) \cup C$	2, 4, 5, 6, 7
$A \cup C$	1, 2, 4, 5, 6, 7
$B \cup C$	2, 3, 4, 5, 6, 7
$(A \cup C) \cap (B \cup C)$	2, 4, 5, 6, 7

$\therefore (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (দেখানো হলো)

উদাহরণ– ১৫। 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে ... জন বাংলা, 80 জন গণিতে এবং 70 জন উভয় বিষয়ে পাস করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান: ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং বাংলায় ও গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B ও M দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P, Q, R, F দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

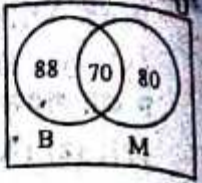
এখানে, উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট $Q = B \cap M$, যার সদস্য সংখ্যা 70

P = শুধু বাংলায় পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 88 - 70 = 18$

R = শুধু গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 80 - 70 = 10$

$P \cup Q \cup R = B \cup M$, এক এবং উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যার সদস্য সংখ্যা $= 18 + 10 + 70 = 98$

F = উভয় বিষয়ে ফেল করা শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 100 - 98 = 2$

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 2 জন শিক্ষার্থী। (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ২.১

১। নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

ক) $\{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$

খ) $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$

গ) $\{x \in N : x$, 36 গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$

ঘ) $\{x \in N : x^3 < 25$ এবং $x^4 < 264\}$

সমাধান:

ক) $\{x \in N ; x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ....\}$

যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 9 অপেক্ষা বড় সেগুলো হলো 4, 5, 6, 7 ....

কারণ $x = 4$ হলে $4^2 > 9$

$x = 5$ হলে $5^2 > 9$ ইত্যাদি।

আবার যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন 130 অপেক্ষা ছোট সেগুলো হলো, 1, 2, 3, 4, 5.

কারণ $x = 1$ হলে, $1^3 < 136$

$x = 2$,, $2^3 < 136$

$x = 3$,, $3^3 < 136$

$x = 4$,, $4^3 < 136$

$x = 5$,, $5^3 < 136$

কিন্তু $x = 6$,, $6^3 \not< 136$

এ থেকে আমরা দেখতে পাই যে, শুধু স্বাভাবিক সংখ্যা $x = 4$ এর ক্ষেত্রে $4^2 > 9$ এবং 5 এর ক্ষেত্রে $5^2 > 9$ এবং $5^3 < 136$ শর্তদ্বয় পূরণ হয়।

অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট $= \{4, 5\}$

খ) $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$

সমাধান: আমরা জানি, পূর্ণ সংখ্যার সেট $Z = \{.... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ 5, 6, 7 ....\}$

যেসব পূর্ণ সংখ্যার বর্গ 5 থেকে বড় সেগুলো হলো 3, 4, 5, 6 ....

কারণ, $x = -3$ হলে $x^2 > 5$

$x = -4$,, $4^2 > 5$

$x = 3$ হলে $x^2 > 5$

$x = 4$,, $x^2 > 5$

আবার, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন 36 অপেক্ষা ছোট বা সমান সেগুলো হলো 1, 2, 3.

কারণ $x = 1$ হলে, $1^3 < 36$

$x = 2$,, $2^3 < 36$

$x = 3$,, $3^3 < 36$

কিন্তু $x = 4$,, $4^3 \not< 36$

সুতরাং এ থেকে দেখা যায়, পূর্ণ সংখ্যা $x = 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$

অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট $x = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$

গ) $\{x \in N : x$, 36 এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$

সমাধান: আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট = 1, 2, 3, 4, 5 ....}

এখানে, 36–এর গুণনীয়কগুলো হলো–

$36 = 1 \times 36$

$= 2 \times 18$

$= 3 \times 12$

$= 4 \times 9$

$= 6 \times 6$

অর্থাৎ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36} এবং 6 এর গুণিতক হলো– 6, 12, 18, 36

$\therefore$ নির্ণেয় সেট = {6, 12, 18, 36}

ঘ) $\{x \in N : x^3 < 25$ এবং $x^4 < 264\}$

সমাধান : আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট = {1, 2, 3, 4, 5, 6........}

এখন, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন 25 অপেক্ষা কম সেগুলো হলো 1, 2

কারণ $x = 1$ হলে $1^3 < 25$

$x = 2$ " $2^3 < 25$

আবার, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার x^4, 264 অপেক্ষা কম সেগুলো হলো 1, 2, 3, 4

কারণ, $x = 1$ হলে $1^4 < 264$

$x = 2$ " $2^4 < 264$

$x = 3$ " $3^4 < 264$

$x = 4$ " $4^4 < 264$

কিন্তু $x = 5$ হলে, $5^4 \not< 264$

এ থেকে দেখা যায় শুধুমাত্র স্বাভাবিক সংখ্যা $x = 2$ এর ক্ষেত্রে $2^3 < 25$ এবং $2^4 < 264$ শর্তদ্বয় পূরণ করে।

অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট = {2}

২। নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

ক) {3, 5, 7, 9, 11}

খ) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

গ) {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

ঘ) {± 4, ± 5, ± 6)

সমাধান :

ক) {3, 5, 7, 9, 11}

মনেকরি, A = {3, 5, 7, 9, 11}

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ 3, 5, 7, 9, 11

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান বিজোড় এবং 11 এর বড় নয়।

∴ A = {$x \in N$: x, স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা যেখানে, $x \le 11$} (Ans.)

খ) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36}

মনেকরি, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36}

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36}

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 36 এর গুণনীয়ক।

∴ A = {$x \in N$: x, 36 এর গুণনীয়ক} (Ans.)

গ) {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

মনেকরি, A = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 4 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 4 এর গুণিতক এবং $x \le 40$

∴ A = {x : x, 4 এর গুণিতক এবং $x \le 40$}

ঘ) {± 4, ± 5, ± 6}

সমাধান :

ধরি, A = {± 4, ± 5, ± 6}

এখানে A সেটের উপাদানসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং যার বর্গ 16 অপেক্ষা বড় অথবা সমান এবং ঘন 216 অপেক্ষা ছোট অথবা সমান।

∴ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী নির্ণেয় সেট A = {$x \in Z$: $x^2 \ge 16$ এবং $x^3 \le 216$}

৩। A = {2, 3, 4}, B = {1, 2, a} এবং C = {2, a, b} হলে নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর :

ক) B / C

খ) A ∪ B

গ) A ∩ C

ঘ) A ∪ (B ∩ C)

ঙ) A ∩ (B ∪ C)

সমাধান :

ক) B / C

দেওয়া আছে, B = {1, 2, a} C = {2, a, b}

∴ B / C = {1, 2, a} / {2, a, b}

= {1} (Ans.)

খ) A ∪ B

দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4}

B = {1, 2, a}

∴ A ∪ B = {2, 3, 4} ∪ {1, 2, a}

= {1, 2, 3, 4, a} (Ans.)

গ) A ∩ C

দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4}

C = {1, a, b}

∴ A ∩ C = {2, 3, 4} ∩ {2, a, b}

= {2} (Ans.)

ঘ) A ∪ (B ∩ C)

দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4}

B = {1, 2, a}

C = {2, a, b}

এখানে, B ∩ C = {1, 2, a} ∩ {2, a, b}

= {2, a}

∴ A ∪ (B ∩ C) = {2, 3, 4} ∪ {2, a}

= {2, 3, 4, a} (Ans.)

ঙ) A ∩ (B ∪ C)

দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4}

B = {1, 2, a}

C = {2, a, b}

এখানে, B ∪ C = {1, 2, a} ∪ {2, a, b}

= {1, 2, a, b}

∴ A ∩ (B ∪ C) = {2, 3, 4} ∪ {1, 2, a, b}

= {2} (Ans.)

৪। U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6} এবং C = {3, 4, 5, 6, 7} হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর :

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

ii. $(B \cap C)' = B' \cup C'$

iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

সমাধান :

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

দেওয়া আছে, U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

A = {1, 3, 5}

B = {2, 4, 6}

∴ A ∪ B = {1, 3, 5} ∪ {2, 4, 6}

= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

∴ L.H.S = $(A \cup B)'$ = U − (A ∪ B)

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} − {1, 2, 3, 4, 5, 6}

= {7}

R.H.S' A' = U − A

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} − {1, 3, 5}

= {2, 4, 6, 7}

B' = U − B

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} − {2, 4, 6}

= {1, 3, 5, 7}

R.H.S = $A' \cap B'$
$= \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\}$
$= \{7\}$
$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

ii) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{4, 6\}$
$\therefore$ L.H.S $= (B \cap C)' = U - (B \cup C)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$B' = U - B$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 3, 5, 7\}$
$C' = U - C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{1, 2\}$
R.H.S $= B' \cup C'$
$= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2\}$
$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$\therefore A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\therefore$ L.H.S $= (A \cup B) \cap C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$
$A \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 5\}$
$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{4, 6\}$
R.H.S $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$= \{3, 5\} \cup \{4, 6\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$
$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5, \}$
$B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\}$
$= \phi$
$\therefore$ L.H.S $= (A \cap B) \cup C$
$= \phi \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
R.H.S $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

৫। $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$ হলে, P(Q) এবং P(R) নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,
$Q = \{x, y\}$
$\therefore P(Q) = \{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \phi\}$ (Ans.)
এখানে, Q সেটের উপাদানসংখ্যা 2 তাই এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে $= 4 = 2^2$
এবং $R = \{m, n, l\}$
$\therefore P(R) = \{\{m, n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \{\phi\}\}$ (Ans.)
এখানে R সেটের উপাদানসংখ্যা 3 তাই এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে, $8 = 2^3$.

৬। $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে, n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}$
$B = \{a, b, c\}$
$\because C = A \cup B$
$= \{a, b\} \cup \{a, b, c\}$
$= \{a, b, c\}$
$\therefore P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \phi\}$
কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n
যেহেতু n হচ্ছে c সেটের উপাদান সংখ্যা
$\therefore$ P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n (দেখানো হলো)

৭। ক) $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$
আমরা ক্রমজোড়ের ধারণা থেকে পাই,
$x - 1 = y - 2$ .... (i)
$y + 2 = 2x + 1$ .... (ii)
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,
$x - 1 = y - 2$
বা, $x = y - 2 + 1$
$\therefore x = y - 1$ .... (iii)
x-এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$y + 2 = 2(y - 1) + 1$
বা, $y = 2(y - 1) + 1 - 2$
বা, $y = 2y - 2 + 1 - 2$
বা, $y = 2y - 3$
বা, $y - 2y = -3$
বা, $-y = -3$
$\therefore y = 3$
y এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$x = 3 - 1$
বা, $x = 2$
$\therefore x = 2$
অতএব, নির্ণেয় মান $(x, y) = (2, 3)$

খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$
আমরা, ক্রমোজোড়ের ধারণা থেকে পাই,
$ax - cy = 0$ .... (i)
$a^2 - c^2 = ay - cx$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই,

$ax = cy$

বা, $x = \frac{cy}{a}$ .... (iii)

(i) নং এর মান (ii) নং বসিয়ে পাই,

$a^2 - c^2 = ay - c.\frac{cy}{a}$

বা, $a^2 - c^2 = ay - \frac{c^2y}{a}$

বা, $a^2 - c^2 = \frac{a^2y - c^2y}{a}$

বা, $a^2 - c^2 = \frac{y(a^2 - c^2)}{a}$

বা, $\frac{(a^2 - c^2)}{y(a^2 - c^2)} = \frac{1}{a}$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{a}$

$\therefore y = a$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = \frac{c.a}{a}$

$\therefore x = c$

অতএব নির্ণেয় মান $(x, y) = (c, a)$

গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

আমরা ক্রমজোড়ের ধারণা থেকে পাই,

$6x - y = 1$ .... (i)

$3x + 2y = 13$ .... (ii)

(i) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করি,

$12x - 2y = 2$

$3x + 2y = 13$

$15x + 0 = 15$

বা, $x = \frac{15}{15}$

$\therefore x = 1$

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$6.1 - y = 1$

বা, $-y = 1 - 6$

বা, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

অতএব নির্ণেয় মান $(x, y) = (1, 5)$

৮। ক) $P = \{a\}$, $Q = \{b, c\}$ হলে, $P \times Q$ এবং $Q \times P$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$P = \{a\}$

$Q = \{b, c\}$

$\therefore P \times Q = \{a\} \times \{b, c\}$

$= \{(a, b), (a, c)\}$

এবং $Q \times P = \{b, c\} \times \{a\}$

$= \{(b, a), (c,a)\}$

অতএব $P \times Q = \{(a, b), (a, c)\}$

$Q \times P = \{(b, a), (c, a)\}$ (Ans.)

খ) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$ হলে, $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$A = \{3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

$C = \{x, y\}$

এখানে, $A \cap B = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\}$

$= \{4, 5\}$

$\therefore (A \cap B) \times C = \{4, 5\} \times \{x, y\}$

$= \{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় $(A \cap B) \times C = \{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$

গ) $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P/Q$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{5, 7\}$

$R = P \setminus Q$

এখানে, $R = P \setminus Q$

$= \{3, 5, 7\} \setminus \{5, 7\}$

$= \{3\}$

$P \cup Q = \{3, 5, 7\} \cup \{5, 7\}$

$= \{3, 5, 7\}$

$\therefore (P \cup Q) \times R = \{3, 5, 7\} \times \{3\}$

$= \{(3, 3), (5, 3), (7,3)\}$

অতএব, $(P \cup Q) \times R = \{(3,3), (5,3), (7,3)\}$ (Ans.)

৯। A ও B যথাক্রমে 35 ও 45 এর সকল গুননীয়কের সেট হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

সমাধান: 35 এর গুণনীয়কের উপাদানগুলো হলো 1, 5, 7, 35 এবং 45 এর গুণনীয়কের উপাদানগুলো হলো 1, 3, 5, 9, 15, 45.

অর্থাৎ $A = \{1, 5, 7, 35\}$

$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$ Ans.

এবং $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 5\}$ (Ans.)

১০। যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকবে, সে সংখ্যাগুলো 31 অপেক্ষা বড় এবং সে সংখ্যাগুলো দ্বারা $346 - 31) = 315$ এবং $(556 - 31) = 525$ বিভাজ্য হবে।

অর্থাৎ সংখ্যাগুলো 315 এবং 525 এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনেকরি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট = A

এবং 31 অপেক্ষা বড় 525 এর গুণনীয়কের সেট = B

$\therefore A = \{35, 105, 315\}$

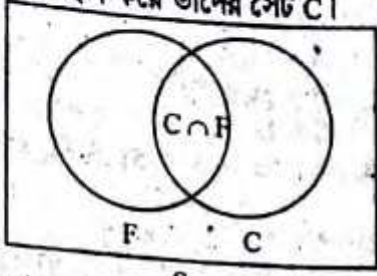
$\therefore A \cap B$ এবং $B = \{35, 75, 105, 175, 525\}$

$= \{35, 105, 315\} \cap \{35, 75, 105, 175, 525\}$

$= \{35, 105\}$

অতএব, নির্ণেয় সেট $= \{35, 105\}$ (Ans.)

১১। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে তদ্রূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যার সেট S। যারা ফুটবল খেলা পছন্দ করে তাদের সেট F এবং যারা ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট C।

তাহলে, প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 30$

$n(F) = 20$

$n(C) = 15$

এবং $n(C \cap F) = 10$

কোনো খেলাই পছন্দ করে না এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$= n(S) - n(C \cup F)$

এখন, $n(C \cup F) = n(C) + n(F) - n(C \cap F)$

$= 15 + 20 - 10$

$= 35 - 10$

$= 25$

∴ কোনো খেলাই পছন্দ করে না এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $n(S) - n(C \cup F) = 30 - 25$

$= 5$

∴ 5 জন শিক্ষার্থী কোনো খেলাই পছন্দ করে না। (Ans.)

১২। 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65% শিক্ষার্থী বাংলায়, 48% শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাস এবং 15% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাস করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ) উভয় বিষয়ে পাস এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) মনে করি, সার্বিক সেট ∪

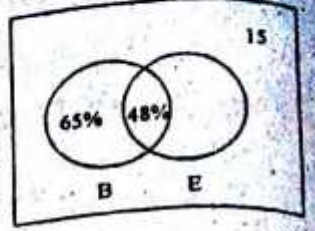
বাংলায় পরীক্ষার্থীদের সেট B

ইংরেজিতে " " E

∴ $n(\cup) = 100$, $n(B) = 65$,

$n(B \cap E) = 48$ এবং $n(B \cup E)$

$= 15$

15
65% 48%
B E

খ) আমরা জানি, $n(B \cup C) = n(\cup) - n(B \cup E)$

$= 100 - 15 = 85$

আবার, আমরা জানি, $n(B \cup E) = n(B) + n(E) - n(B \cap E)$

বা, $85 = 65 + n(E) - 48$

বা, $85 - 65 + 48 = n(E)$

∴ $n(E) = 68$

শুধু বাংলায় পাস করেছে $= n(B) - n(B \cap E)$

$= 65 - 48 = 17$

শুধু ইংরেজিতে পাস করেছে $= n(E) - n(B \cap E)$

$= 68 - 48$

$= 20$

গ) $n(B \cap E) = 48$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

এবং $n(B \cap E) = 15 = 3 \times 5$

48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট $A = \{2,3\}$

এবং 15 " " " $C = \{3,5\}$

∴ $A \cup C = \{2,3\} \cup \{3,5\}$

$= \{2, 3, 5\}$

অতএব, নির্ণেয় সেট $\{2, 3, 5\}$।

অনুশীলনী- ২.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-১ : যদি $C = \{2, 5, 6\}$, $D = \{4, 5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x \le y$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে, তবে অন্বয় নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা- ৩২]

সমাধান : দেওয়া আছে,

$C = \{2, 5, 6\}$ এবং $D = \{4, 5\}$

প্রশ্নানুসারে,

অন্বয়, $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x \le y\}$

এখানে, $C \times D = \{2, 5, 6\} \times \{4, 5\}$

$= \{(2, 4), (2, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 4), (6, 5)\}$

∴ প্রদত্ত সম্পর্ক অনুসারে নির্ণেয় অন্বয়,

$R = \{(2, 4), (2, 5), (5, 5)\}$

কাজ-২: $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$ হলে, S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-৩৩]

সমাধান : দেওয়া আছে, $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

এখানে, S অন্বয়ে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $-3, -2, -1, 0, 1, 2$.

S অন্বয়ে ক্রমজোড়গুলোর দ্বিতীয় উপাদানসমূহ, $8, 3, 0, -1, 0, 3$

∴ ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং রেঞ্জ $S = (-1, 0, 3, 8)$ (Ans.)

কাজ-৩: $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা- ৩৩]

সমাধান : দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$।

এখানে, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y - x = 1$ বা, $y = x + 1$ এর মান নির্ণয় করি।

x	−3	−2	−1	0
y	−2	−1	0	1

যেহেতু, $1 \notin A$, কাজেই $(0, 1) \notin S$

∴ $S = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0)\}$

∴ ডোম $S = \{-3, -2, -1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0)$

(Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ২.২

১। 8 এর গুণনীয়ক সেট কোনটি?

ক) {8, 16, 24, ...} খ) {1, 2, 3, 4, 8}
গ) {2, 4, 8} ঘ) {1,2}

Ans : {8, 16, 24, ...}

২। সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $R \subset C$ খ) $R \subset B$
গ) $R \subseteq C \times B$ ঘ) $C \times B \subseteq R$

Ans : $R \subseteq C \times B$

৩। A = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13} হলে, নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

i. A সেটের গঠন পদ্ধতি কোনটি?

ক) $\{x \in N : 6 < x < 13\}$ খ) $\{x \in N : 6 \le x < 13\}$
গ) $\{x \in N : 6 \le x \le 13\}$ ঘ) $\{x \in N : 6 < x \le 13\}$

Ans : $\{x \in N : 6 \le x \le 13\}$

ii. মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি?

ক) {6, 8, 10, 12} খ) {7, 9, 11, 13}
গ) {7, 11, 13} ঘ) A = {9, 12}

Ans : A = {7, 11, 13}

iii. 3 এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি?

ক) {6, 9} খ) {6, 11}
গ) {9, 12} ঘ) {6, 9, 12}

Ans : {6, 9, 12}

iv. বৃহত্তম জোড় সংখ্যার গুণনীয়কের সেট কোনটি?

ক) {1, 13} খ) {1, 2, 3, 6}
গ) {1, 2, 9} ঘ) {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Ans : {1, 2, 3, 4, 6, 12}

৪। যদি A = {3,4}, B = {2, 4} হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে x < y সম্পর্ক বিবেচনা করে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, A = {3, 4}
এবং B = {2, 4}

প্রশ্নানুসারে, অন্বয় $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x > y\}$

এখানে, $A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 4\}$
$= \{(3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$
$\therefore R = \{(3, 2), (4, 2)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় রিলেশন, {3, 2), (4, 2)}

৫। যদি C = {2,5}, D = {4,6} এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে x + 1 < y সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, C = {2, 5}
এবং D = {4, 6}

প্রশ্নানুসারে অন্বয়, $R = \{(x, y) : x \in C, x \in D$ এবং $x + 1 < y\}$

এখন, $C \times D = \{2, 5,\} \times \{4, 6\}$
$= \{(2, 4), (2, 6), (5, 4), (5, 6)\}$
$\therefore R = \{(2, 4), (2, 6)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় রিলেশন {(2, 4), (2, 6)}

৬। $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$, $f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$

$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 5(-1) - 3$
$= 1 - 5 - 3$
$= -7$

$\therefore f(2) = (2)^4 + 5 \times 2 - 3$
$= 16 + 10 - 3$
$= 26 - 3$
$= 23.$

এবং $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5.\frac{1}{2} - 3$
$= \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3$
$= \frac{1 + 40 - 48}{16}$
$= \frac{41 - 48}{16}$
$= \frac{-7}{16}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= -7, 23, \frac{-7}{16}$

৭। যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

সমাধান :

দেয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$

$\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4(-2) - 8$
$= -8 + 4k + 8 - 8$
$= 4k - 8$

কিন্তু $f(-2) = 0$
$\therefore 4k - 8 = 0$
বা, $4k = 8$
বা, $k = \frac{8}{4}$
$\therefore k = 2$

$\therefore$ k এর 2 মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে

৮। $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

সমাধান :

দেয়া আছে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
যেহেতু $f(x) = 0$
$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
বা, $x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 = 0$
বা, $x^2(x - 3) - 3x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$
বা, $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$
বা, $(x - 3)(x^2 - 2x - x + 2) = 0$
বা, $(x - 3)\{x(x - 2) - 1(x - 2\} = 0$
বা, $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 0$

হয় $x - 3 = 0$ | $x - 2 = 0$ | $x - 1 = 0$
$\therefore x = 3$ | $x = 2$ | $\therefore x = 1$

$\therefore$ x = 1 অথবা 2 অথবা 3 হলে f(x) = 0 হবে।

৯। যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{x^2}+1}{2\cdot\frac{1}{x^2}-1} = \frac{\frac{2}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}-1} = \frac{\frac{2+x^2}{x^2}}{\frac{2-x^2}{x^2}} = \frac{2+x^2}{x^2}\times\frac{x^2}{2-x^2} = \frac{2+x^2}{2-x^2}$$

$$\therefore \frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1} = \frac{\frac{2+x^2}{2-x^2}+1}{\frac{2+x^2}{2-x^2}-1} = \frac{\frac{2+x^2+2-x^2}{2-x^2}}{\frac{2+x^2-2+x^2}{2-x^2}} = \frac{4}{2-x^2}\times\frac{2-x^2}{2x^2} = \frac{2}{x^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\frac{2}{x^2}$

১০। $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\text{বামপক্ষ, } g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^4}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{x^8+x^4+1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{1+x^4+x^8}{x^8}\times\frac{x^4}{1} = \frac{1+x^4+x^8}{x^4}$$

$$\text{ডানপক্ষ, } g(x^2) = \frac{1+(x^2)^2+(x^2)^4}{(x^2)^2} = \frac{1+x^4+x^8}{x^4}$$

$\therefore g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$ (দেখানো হলো)

১১। নিচের অন্বয়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর :

ক) $R = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

খ) $S = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

গ) $F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, $R = \{2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

R অন্বয়ে ক্রমোজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ 2, 2, 2 এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ 1, 2, 3.

$\therefore$ ডোম $R = \{2\}$

এবং রেঞ্জ $R = \{1, 2, 3\}$

খ) দেওয়া আছে, $S = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

S অন্বয়ে ক্রমোজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ −2, −1, 0, 1, 2 এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ 4, 1, 0, 1, 4

$\therefore$ ডোম $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

রেঞ্জ $S = \{0, 1, 4\}$

গ) দেয়া আছে,

$F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right) (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

F অন্বয়ে ক্রমোজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $\frac{1}{2}$, 1, 1, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ 0, 1, −1, 2, −2.

$\therefore$ ডোম F $= \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

এবং রেঞ্জ F $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

১২। নিচের অন্বয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

ক) $R = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

খ) $F = \{(x,y) : x \in C, y \in C$ এবং $x = 2y\}$, যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 1, 3\}$

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং $R = \{x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

R এর বর্ণিত শর্ত হতে পাই, $x + y = 1$

$\therefore y = 1 - x$

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = 1 - x$ এর মান নির্ণয় করি।

x	−2	−1	0	1	2
y	3	2	1	0	−1

যেহেতু $x \notin A$, কাজেই $(-2, 3) \notin R$

$\therefore R = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$

$\therefore$ ডোম $R = \{-1, 0, 1, 2\}$

এবং রেঞ্জ $R = \{1, 0, -1\}$

খ) দেয়া আছে,

$C = \{-1, 0, 1, 1, 3\}$

এবং $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C$ এবং $x = 2y\}$

F এর বর্ণিত শর্ত থেকে $y = 2x$ এর মান নির্ণয় করি

x	−1	0	1	1	3
y	−2	0	2	2	6

∴ কিন্তু $6 \notin C$ কাজেই $(3, 6) \notin F$

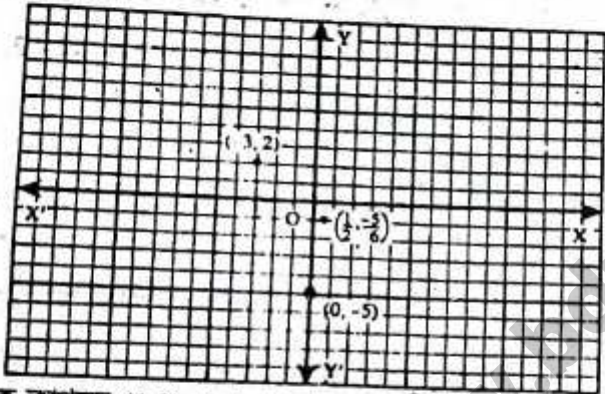
প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $F = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$

∴ ডোম $F = \{-1, 0, 1\}$

এবং রেঞ্জ $F = \{-2, 0, 2\}$

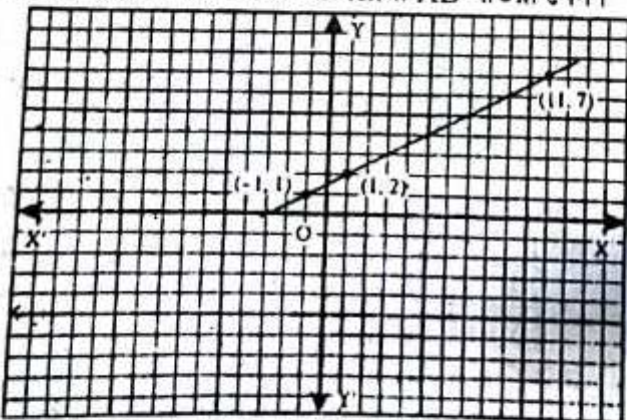
১৩। ছক কাগজে (−3, 2), (0, − 5), $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।

সমাধান :

মনে করি XOX′ ও YOY′ যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ। O মূলবিন্দু। উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। (−3, 2) বিন্দুর ভুজ = −3 এবং কোটি = 2 কাজেই x অক্ষের দিকে কমে −3 একক গিয়ে y অক্ষের ওপরের দিকে 2 একক যাওয়ার পর যে বিন্দুটি পাওয়া যাবে সেটিই হবে (−3, 2) বিন্দু অবস্থান। অনুরূপভাবে, (0, −5) এবং $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি।

১৪। ছক কাগজে (1,2), (−1, 1), (11, 7) বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান :

মনে করি, XOX′ ও YOY′ যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ। O মূলবিন্দু।

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1, 2), (−1, 1) (11, 7) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দু তিনটি যোগ করে একটি সরলরেখা AB পাওয়া গেল।

সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$

$C = \{x \in N : x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. A′ এবং C − B নির্ণয় কর।

গ. B × C এবং P(A ∩ C) নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

এখানে, N = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ...\}$

বিজোড় সংখ্যা সেট $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11 ....\}$

$\therefore U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11 ....\}$

$A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$

$= \{4, 5\}$

$C = \{x \in N : x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

$= \{3, 4, 5\}$

ক) দেয়া আছে, $A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ....\}$

x এর মান 2 এর সমান বা 2 থেকে বড়

এবং 7 এর সমান বা 7 থেকে ছোট হবে।

∴ নির্ণেয় সেট $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

খ) $A' = U - A$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11 ....\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{1, 9, 11 ....\}$

এবং $C - B = \{3, 4, 5\} - \{4, 5\}$

$= \{3\}$

গ) $B \times C = \{4, 5\} \times \{3, 4, 5\}$

$= \{(4, 3), (4, 4) (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)$

এবং P (A ∩ C)

$\therefore A \cap C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5\}$

$= \{3, 4, 5\}$ **(Ans.)**

$P(A \cap C) = P\{3, 4, 5\}$

$= \{\{3, 4, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \phi\}$

(Ans.)

অধ্যায় ৩

বীজগাণিতিক রাশি

বাস্তব সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

❖ **বর্গের সূত্রাবলি :**

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
  $= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
- $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$
- $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$
- $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

❖ **ঘন সম্পর্কিত সূত্রবলি :**

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

❖ **রাশি :** এক বা একাধিক চলক ও ধ্রুবককে $+, -, \times, \div$ ক্রিয়াসূচক চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হলে তার বিন্যাসকে (বীজগাণিতিক) রাশি বলে। যেমন : $ax^2 + bx + c$

❖ **চল বা চলক :** যে প্রতীক, নির্দিষ্ট সেটের যে কোনো উপাদানকে বোঝায়, তাকে চল বলে। যেমন —
$A = \{x \in R : 1 \le x \le 3\}$ এক্ষেত্রে x একটি চল। x এর মান 1 হতে 3 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা।

❖ **ঘাত :** a^n কে a এর n তম ঘাত বলে যেখানে, $n \in N$.

❖ **সূত্র :** সূত্র হলো চলক সম্বলিত সমীকরণ যা সংশ্লিষ্ট চলকের যেকোনো মানের জন্য সত্য। অন্যভাবে সূত্র হল প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত সাধারণ নিয়ম।

❖ **উৎপাদক :** যদি একটি রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলে।
যেমন— $a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$
এখানে, $(a+3)$ ও $(a-2)$, $a^2 + a - 6$ এর দুটি উৎপাদক।

❖ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ :** কোনো বীজগণিতীয় রাশির সবগুলো সম্ভাব্য উৎপাদক বের করে একে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়।

❖ **উৎপাদক নির্ণয় করার পদ্ধতি :**

(i) প্রথমে প্রদত্ত রাশিমালাটিকে পর্যবেক্ষণ করে দেখতে হবে সবগুলো পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক অর্থাৎ এক জাতীয় রাশি আছে কিনা। যদি থাকে তবে তা Common নিতে হবে। যেমন—
$2ax^2 - 2ay^2$ রাশিটিতে সাধারণ উৎপাদক 2a. সুতরাং 2a, Common নিয়ে রাশিটিকে লেখা যায়, $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$

(ii) সাধারণ উৎপাদক Common নেয়ার পর প্রাপ্ত রাশিটিকে সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হলে তা করতে হবে। যেমন—
ওপরের উদাহরণে $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$
$= 2a(x+y)(x-y)$

(iii) $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির জন্য – Middle term break up (মধ্যপদী বিশ্লেষণ) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

❖ **ফাংশন :** যদি দুটি চলরাশি x ও y এরূপভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, x এর যে কোনো মানের জন্য y এর অনুরূপ একটি মান পাওয়া যায়, তবে y-কে x-এর ফাংশন বলে। যেমন : $y = 2x^2 + 5$
এখানে, x স্বাধীন চলক এবং y অধীন চলক।
ফাংশনকে সাধারণত f, F, g, h ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন, $y = f(x) = 2x^2 + 5$

❖ **ভাগশেষ উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$–কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হল ভাগশেষ উপপাদ্য।

যদি কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$ এর মান x এর কোনো একটি নির্দিষ্ট মান a এর জন্য শূন্য অর্থাৎ $f(a) = 0$ হয়, তবে $(x - a)$ হবে এর একটি উৎপাদক। যেমন,

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখানে, $x = -1$ বসালে,

$f(-1) = (-1)^3 + 6.(-1)^2 + 11.(-1) + 6$
$= -1 + 6 - 11 + 6$
$= 12 - 12$
$= 0$

$\therefore$ $x - (-1)$ অর্থাৎ $x + 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

❖ **উৎপাদক উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী $f(x)$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

☐ অনুশীলনী– ৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ **কাজ–: সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :** [পৃষ্ঠা–৪১]

১। $3xy + 2ax$

সমাধান : $3xy + 2ax$ এর বর্গ

$= (3xy + 2ax)^2$
$= (3xy)^2 + 2.3xy.2ax + (2ax)^2$
$= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2$
$= x^2(9y^2 + 12ay + 4a^2)$ **(Ans.)**

২। $4x - 3y$

সমাধান : $4x - 3y$ এর বর্গ

$= (4x - 3y)^2$
$= (4x)^2 - 2.4x.3y + (3y)^2$
$= 16x^2 - 24xy + 9y^2$ **(Ans.)**

৩। $x - 5y + 2z$

সমাধান : $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$

$= (x - 5y)^2 + 2(x - 5y)\,2z + (2z)^2$
$= x^2 - 2.x.5y + (5y)^2 + 4xz - 20yz + 4z^2$
$= x^2 - 10xy + 25y^2 + 4xz - 20yz + 4z^2$ **(Ans.)**

অথবা, $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$

$= x^2 + (-5y)^2 + (2z)^2 + 2.x.(-5y) + 2.(-5y).2z + 2.x.2z$
$= x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 10xy - 20yz + 4xz$ **(Ans.)**

☐ **কাজ**

১। সরল কর : $(4x + 3y)^2 + 2(4x + 3y)(4x - 3y) + 94x - 3y)^2$ [পৃষ্ঠা–৮৬]

সমাধান : ধরি, $4x + 3y = a$
এবং $4x - 3y = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= (4x + 3y + 4x - 3y)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (8x)^2$
$= 64x^2$ **(Ans.)**

২। $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হলে, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y + z = 12$

বা, $(x + y + z)^2 = (12)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 144$
বা, $50 + 2(xy + yz + zx) = 144$
বা, $2(xy + yz + zx) = 144 - 50$
বা, $xy + yz + zx = \frac{94}{2}$

$\therefore xy + yz + zx = 47$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$
$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$
$= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$
$= 2 \times 50 - 2 \times 47$ [মান বসিয়ে]
$= 100 - 94 = 6$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ৪। $a + b + c + d$ এর বর্গ কত?

সমাধান : $a + b + c + d$ এর বর্গ $(a + b + c + d)^2 = \{(a + b) + (c + d)^2$

$= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + ad + bc + bd) + c^2 + 2cd + d^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ৫। সরল কর : $(5x + 7y + 3z)^2 + 2(7x - 7y - 3z)(5x + 7y + 3z) +) + (7x - 7y - 3z)^2$

সমাধান : ধরি, $5x + 7y + 3z = a$ এবং $7x - 7y - 3z = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2.b.a + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (5x + 7y + 3z + 7x - 7y - 3z)^2$
$= (12x)^2$
$= 144x^2$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ৬। $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - y = 2$ এবং $xy = 24$

এখন, $x + y$ এর মান বের করতে হবে।

আমরা জানি, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (2)^2 + 4 \times 24 = 4 + 96 = 100$

$\therefore x + y = \pm\sqrt{100} = \pm 10$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ৭। যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হয়, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হলে $a^2 + b^2$ এর মান বের করতে হবে।

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$
$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$
$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore 3 = 3(a^2 - ab + b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = \frac{3}{3} = 1$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = 3$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 1$ যোগ করে পাই, $2(a^2 + b^2) = 4$

বা, $a^2 + b^2 = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore a^2 + b^2 = 2$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ৮। প্রমাণ কর যে, $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

সমাধান: প্রমাণ করতে হবে যে, $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

$(a + b)^4 - (a - b)^4 = \{(a + b)^2\}^2 - \{(a - b)^2\}^2$
$= \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}\{(a + b)^2 - (a - b)^2\}$
$= 2(a^2 + b^2) \times 4ab$
[$\because (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
এবং $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$]
$= 8ab(a^2 + b^2)$

$\therefore (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ৯। $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান কত?

সমাধান: $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান বের করতে হবে।

এখানে, $2(ab + bc + ac)$
$= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$
$= (15)^2 - 83$
$= 225 - 83$ [মান বসিয়ে]
$= 142$

$\therefore ab + bc + ac = \frac{142}{2} = 71$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি :

আমরা জানি,
$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$
বা, $(15)^2 = 83 + 2(ab + bc + ac)$
বা, $255 - 83 = 2(ab + bc + ac)$
বা, $2(ab + bc + ac) = 142$

$\therefore ab + bc + ca = \frac{142}{2} = 71$ **(Ans.)**

উদাহরণ–১০। $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ac = 1$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ac = 1$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান বের করতে হবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 + c^2 + c^2 + 2ca + a^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2ab + c^2 + c^2 + 2ca + a^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2)$
$= (a + b + c)^2 + \{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)\}$
$= 4 + 4 - 2 = 8 - 2 = 6$ **(Ans.)**

উদাহরণ– ১১। $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $2x + 3y = a$ এবং $4x - 5y = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= ab$

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$

$\therefore (2x + 3y)(4x - 5y) = \left(\frac{2x + 3y + 4x - 5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x + 3y - 4x + 5y}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{2(3x - y)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2(4y - x)}{2}\right)^2$
$= (3x - y)^2 - (4y - x)^2$

$\therefore (2x + 3y)(4x - 5y) = (3x - y)^2 - (4y - x)^2$ (প্রকাশিতরূপ)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.১

১। সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর।

ক) $2a + 3b$ এর বর্গ কত?

সমাধান: $(2a + 3b)^2$
$= (2a)^2 + 2.2a.3b + (3b)^2$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$ **(Ans.)**

খ) $2ab + 3bc$

সমাধান: $(2ab + 3bc)^2$
$= (2ab)^2 + 2.2ab.3bc + (3bc)^2$
$= 4a^2b^2 + 12ab^2c + 9b^2c^2$ **(Ans.)**

গ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$

সমাধান: $\left(x^2 + \frac{2}{y^2}\right)^2$
$= (x^2)^2 + 2.x^2.\frac{2}{y^2} + \left(\frac{2}{y^2}\right)^2$
$= x^4 + 4\frac{x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$
$= x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$ **(Ans.)**

ঘ) $a + \frac{1}{a}$

সমাধান: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$
$= a^2 + 2.a.\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2$
$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$ **(Ans.)**

ঙ) $4y - 5x$

সমাধান : $(4y - 5x)^2$
$= (4y)^2 - 2.4y.5x + (5y)^2$
$= 16y^2 - 40xy + 25y^2$ (Ans.)

চ) $ab - c$

সমাধান : $(ab - c)^2$
$= (ab)^2 - 2.ab.c + c^2$
$= a^2b^2 - 2abc + c^2$ (Ans.)

ছ) $5x^2 - y$

সমাধান : $(5x^2 - y)^2$
$= (5x^2)^2 - 2.5x^2.y + y^2$
$= 25x^4 - 10x^2y + y^2$ (Ans.)

জ) $x + 2y + 4z$

সমাধান : $(x + 2y + 4z)^2$
$= \{(x + 2y) + 4z\}^2$
$= (x + 2y)^2 + 2.(x + 2y). 4z + (4z)^2$
$= x^2 + 2.x.2y + 4y^2 + 8z (x + 2y) + 16z^2$
$= x^2 + 4xy + 4y^2 + 8xz + 16yz + 16z^2$
$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 8xz + 16yz$ (Ans.)

ঝ) $3p + 4q - 5r$

সমাধান : $(3p + 4q - 5r)^2$
$= \{(3p + 4q) - 5r\}^2$
$= (3p + 4q)^2 - 2.(3p + 4q). 5r + (5r)^2$
$= (3p)^2 + 2.3p.4q + (4q)^2 - 10r (3p + 4q) + 25r^2$
$= 9p^2 + 24pq + 16q^2 - 30pr - 40qr + 25r^2$
$= 9p^2 + 16q^2 + 25r^2 + 24pq - 30pr - 40qr$ (Ans.)

ঞ) $3b - 5c - 2a$

সমাধান : $(3b - 5c - 2a)^2$
$= \{(3b - 5c) - 2a\}^2$
$= (3b - 5c)^2 - 2.(3b - 5c).2a + (2a)^2$
$= (3b)^2 - 2.3b.5c + (5c)^2 - 4a (3b - 5c) + 4a^2$
$= 9b^2 - 30bc + 25c^2 - 12ab + 20ac + 4a^2$
$= 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 - 12ab - 30bc + 20ca$ (Ans.)

ট) $ax - by - cz$

সমাধান : $(ax - by - cz)^2$
$= \{(ax - by) - cz\}^2$
$= (ax - by)^2 - 2.(ax - by).cz + (cz)^2$
$= (ax)^2 - 2ax.by + (by)^2 - 2cz (ax - by) + c^2z^2$
$= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2cz.ax + 2cz.by + c^2z^2$
$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy - 2acxz + 2bcyz$ (Ans.)

ঠ) $a - b + c - d$

সমাধান : $(a - b + c - d)^2$
$= \{(a - b) + (c - d)\}^2$
$= (a - b)^2 + 2 (a - b) (c - d) + (c - d)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd + c^2 - 2cd + d^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$ (Ans.)

ড) $2a + 3x - 2y - 5z$

সমাধান : $2a + 3x - 2y - 5z$
$= \{(2a + 3x) - (2y + 5z)\}^2$
$= (2a + 3x)^2 - 2.(2a + 3x).(2y + 5z) + (2y + 5z)^2$
$= (2a)^2 + 2.2a.3x + (3x)^2 - 2 \{4ay + 10az + 6xy + 15xz\} + (2y)^2 + 2.2y.5z + (5z)^2$
$= 4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz$ (Ans.)

ঢ) 101

সমাধান : $(101)^2$
$= (100 + 1)^2$
$= (100)^2 + 2.100.1 + 1^2$
$= 10,000 + 200 + 1$
$= 10201$ (Ans.)

ণ) 997

সমাধান : $(997)^2$
$= (1000 - 3)^2$
$= (1000)^2 - 2.1000.3 + 3^2$
$= 1000000 - 6000 + 9$
$= 1000009 - 6000$
$= 994009$ (Ans.)

ত) 1007

সমাধান : $(1007)^2$
$= (1000 + 7)^2$
$= (1000)^2 + 2.1000.7 + (7)^2$
$= 1000000 + 14000 + 49$
$= 1014049$ (Ans.)

২। সরল কর :

ক) $(2a + 7)^2 + 2 (2a + 7) (2a - 7) + (2a - 7)^2$

সমাধান : মনে করি, $2a + 7 = a$
এবং $2a - 7 = b$

প্রদত্ত রাশি,
$a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(2a + 7) + (2a - 7)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (2a + 7 + 2a - 7)^2$
$= (4a)^2$
$= 16a^2$ (Ans.)

খ) $(3x + 2y)^2 + 2(3x + 2y) (3x - 2y) + (3x - 2y)^2$

সমাধান : মনে করি, $(3x + 2y) = a$
এবং $3x - 2y = b$

প্রদত্ত রাশি,
$= (a)^2 + 2.a.b + (b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$
$= (a + b)^2$
$= \{(3x + 2y)^2 + (3x - 2y)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (3x + 2y + 3x - 2y)^2$
$= (6x)^2$
$= 36x^2$ (Ans.)

গ) $(7p + 3r - 5x)^2 - 2(7p + 3r - 5x) (8p - 4r - 5x) + (8p - 4r - 5x)^2$

সমাধান : মনে করি, $7p + 3r - 5x = a$
$8p - 4r - 5x = b$

প্রদত্ত রাশি,
$= (a)^2 - 2.a.b + (b)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$
$= \{(7p + 3r - 5x) - 8p - 4r - 5x)\}^2$
$= (7p + 3r - 5x - 8p + 4r + 5x)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (-p + 7r)^2$
$= (7r - p)^2$
$= (7r)^2 - 2.7r.p + (p)^2$
$= 49r^2 - 14rp + p^2$
$= p^2 + 49r^2 - 14rp$ (Ans.)

ঘ) $(2m+3n-p)^2+(2m-3n+p)^2-2(2m+3n-p)(2m-3n+p)$

সমাধান : মনে করি, $2m+3n-p=a$
$2m-3n+p=b$

প্রদত্ত রাশি,
$=(a)^2+(b)^2-2.a.b$
$=a^2-2ab+b^2$
$=(a-b)^2$
$=\{(2m+3n-p)-(2m-3n+p)\}^2$ [a, b এর মান বসিয়ে]
$=(2m+3n-p-2m+3n-p)^2$
$=(6n-2p)^2$
$=(6n)^2-2.6n.2p+(2p)^2$
$=36n^2-24np+4p^2$ (Ans.)

ঙ) $6.35\times6.35+2\times6.35\times3.65+3.65\times3.65$

সমাধান : মনে করি, $6.35=a$
$3.65=b$

∴ প্রদত্ত রাশি,
$=a\times a+2\times a\times b+b\times b$
$=a^2+2ab+b^2$
$=(a+b)^2$
$=(6.35+3.65)^2$ [a, b এর মান বসিয়ে]
$=(10)^2$
$=100$ (Ans.)

চ) $5874\times5874+3774\times3774-7548\times5874$

সমাধান : মনে করি, $5874=a$
$3774=b$

প্রদত্ত রাশি,
$5874\times5874+3774\times3774-7548\times5874$
$=a\times a+b\times b-2\times b\times a$
$=a^2+b^2-2ab$
$=a^2-2ab+b^2$
$=(a-b)^2$
$=(5874-3774)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$=(2100)^2$
$=4410000$ (Ans.)

ছ) $\frac{7529\times7529-7519\times7519}{7529+7519}$

সমাধান : মনে করি, $7529=a$
$7519=b$

$\therefore \frac{a\times a-b\times b}{a+b}$
$=\frac{a^2-b^2}{a+b}$
$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}$
$=(a-b)$
$=(7529-7519)$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$=10$ (Ans.)

জ) $\frac{2345\times2345-759\times759}{2345-759}$

সমাধান : মনে করি, $2345=a$
$759=b$

$\therefore \frac{a\times a-b\times b}{a-b}$
$=\frac{a^2-b^2}{(a-b)}$
$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}$
$=(a+b)$
$=(2345+759)$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$=3104$ (Ans.)

৩। $a-b=4$ এবং $ab=60$ হলে $a+b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a-b=4$
এবং $ab=60$
$\therefore a+b=?$

আমরা জানি, $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$=(4)^2+4.60$
$=16+240$
$=256$
$\therefore a+b=\pm\sqrt{256}$
$=\pm16$ (Ans.)

৪। $a+b=7$ এবং $ab=12$ হলে $a-b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a+b=7$
এবং $ab=12$
$\therefore a-b=?$

আমরা জানি, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$=(7)^2-4\times12$
$=49-48$
$=1$
$\therefore a-b=\pm\sqrt{1}$
$=\pm1$ (Ans.)

৫। $a+b=9m$ এবং $ab=18m^2$ হলে $a-b$ এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $a+b=9m$
এবং $ab=18m^2$
$\therefore a-b=?$

আমরা জানি, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$=(9m)^2-4\times18m^2$
$=81m^2-72m^2$
$=9m^2$
$\therefore a-b=\pm\sqrt{9m^2}$
$=\pm3m$ (Ans.)

৬। $x-y=2$ এবং $xy=63$ হলে, x^2+y^2 এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $x-y=2$
এবং $xy=63$
$\therefore x^2+y^2=?$

আমরা জানি, $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=(2)^2+2\times63$
$=4+126$
$=130$ (Ans.)

৭। $x-\frac{1}{x}=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4-\frac{1}{x^4}=322.$

সমাধান : দেয়া আছে, $x-\frac{1}{x}=4$

বা, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(4)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2-2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=16$

বা, $(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=16+2$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (18)^2$ [পুনরায় উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x^2)^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 324$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 324 - 2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ (প্রমাণিত)

৮। $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$

বা, $\left(2x + \frac{2}{x}\right)^2 = (3)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 2.2x.\frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 9$

বা, $4x^2 + 8 + \frac{4}{x^2} = 9$

বা, $4x^2 + \frac{4}{x^2} = 9 - 8$

বা, $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{4}$

৯। $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2 + 2.a.\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 4$

বা, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 - 2$

$\therefore$ $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

আবার, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

বা, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(a^2)^2 + 2a^2.\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = 4$

বা, $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4 - 2$

$\therefore$ $a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$

অতএব, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$ [দেখানো হলো]

১০। $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$

$a - b = \sqrt{5}$

এখন, বামপক্ষ $= 8ab(a^2 + b^2)$

$= 4ab \times 2(a^2 + b^2)$

$= \{(a + b)^2 - (a - b)^2\} \times \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

$= \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\} \times \{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$

$= (7 - 5) \times (7 + 5)$

$= 2 \times 12$

$= 24$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 9$

এবং $ab + bc + ca = 31$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (9)^2 - 2 \times 31$

$= 81 - 62$

$= 19$ (Ans.)

১২। $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

এবং $ab + bc + ca = 8$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$= 9 + 2 \times 8$ [মান বসিয়ে]

$= 9 + 16$

$= 25$ (Ans.)

১৩। $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 6$

এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

এখন, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$

[$\because a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$]

$= 2 \times 14 + 14 - (6)^2$

$= 28 + 14 - 36$

$= 42 - 36$

$= 6$ (Ans.)

১৪। $x + y + z = 10$ এবং $xy + yz + zx = 31$ হলে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $x + y + z = 10$

$xy + yz + zx = 31$

এখন, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2xz + x^2$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz)$

$= 2\{(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)\} + 2(xy + yz + xz)$

$= 2(x + y + z)^2 - 4(xy + yz + zx) + 2(xy + yz + xz)$

$= 2 \times (10)^2 - 4 \times 31 + 2 \times 31$

$= 2 \times 100 - 124 + 62$

$= 200 - 124 + 62$

$= 262 - 124$

$= 138$ (Ans.)

১৫। $x = 3, y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেয়া আছে, $x = 3$

$y = 4$

এবং $z = 5$

এখন, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$

$= 9 \times (3)^2 + 16(4)^2 + 4(5)^2 - 24 \times 3 \times 4 - 16 \times 4 \times 5 + 12 \times 5 \times 3$

$= 9 \times 9 + 16 \times 16 + 4 \times 25 - 288 - 320 + 180$

$= 81 + 256 + 100 - 288 - 320 + 180$

$= 617 - 608$

$= 9$ (Ans.)

১৬। প্রমাণ কর যে,

$$\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2$

$= \left\{\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}\right\}^2$

$= \left\{\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - \frac{x^2-2xy+y^2}{4}\right\}^2$

$= \left\{\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{4}\right\}^2$

$= \left(\frac{4xy}{4}\right)^2$

$= x^2y^2$

ডানপক্ষ $= \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$

$= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{4} - \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4}$

$= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^4+2x^2y^2-y^4}{4}$

$= \frac{4x^2y^2}{4}$

$= x^2y^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৭। $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $a + 2b = x$

$3a + 2c = y$

প্রদত্ত রাশি $= (a + 2b)(3a + 2c)$

$= xy$

$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{a+2b+3a+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+2b-3a-2c}{2}\right)^2$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{4a+2b+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{2b-2a-2c}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(2a+b+c)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(b-a-c)}{2}\right\}^2$

$= (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

$\therefore (a + 2b)(3a + 2c) = (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$ (Ans.)

১৮। $(x + 7)(x - 9)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $x + 7 = a$

$x - 9 = b$

প্রদত্ত রাশি $= (x + 7)(x - 9)$

$= ab$

$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{x+7+x-9}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+7-x+9}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left\{\frac{2(x-1)}{2}\right\}^2 - (8)^2$

$= (x - 1)^2 - (8)^2$

এটি-ই দুইটি বর্গের বিয়োগফল

$\therefore (x + 7)(x - 9) = (x - 1)^2 - (8)^2$ (Ans.)

১৯। $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে, $x^2 + 10x + 24$

$= x^2 + 6x + 4x + 24$

$= x(x + 6) + 4(x + 6)$

$= (x + 6)(x + 4)$

মনে করি, $x + 6 = a$

$x + 4 = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= (x + 6)(x + 4)$

$= ab$

$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{x+6+x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(x+5)}{2}\right\}^2 - (1)^2$

$= (x + 5)^2 - (1)^2$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

$\therefore (x + 6)(x + 4) = (x + 5)^2 - (1)^2$ (Ans.)

২০। $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে, (i) $a^2 + b^2$ (ii) ab এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$

বা, $(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 8$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

বা, $4(a^2 - ab + b^2) = 8$ [$\because a^2 + b^2 + ab = 4$]

বা, $a^2 - ab + b^2 = \frac{8}{4}$

$\because$ $a^2 - ab + b^2 = 2$ ——— (i)

এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ ——— (ii)

(i) + (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b = 4$

$\underline{a^2 - ab + b^2 = 2}$

$2(a^2 + b^2) = 6$

$\therefore a^2 + b^2 = \frac{6}{2}$

$\therefore a^2 + b^2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $a^2 + b^2 = 3$

আবার (i) – (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b^2 = 4$

$\underline{a^2 - ab + b^2 = 2}$

$2ab = 2$

বা, $ab = \frac{2}{2}$

$= 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, ab = 1

অনুশীলনী– ৩.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–: সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর : [পৃষ্ঠা–৪৬]

১। $3x + 2y$

সমাধান : $3x + 2y$

এখানে, $(3x + 2y)$ এর ঘন

$(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2.2y + 3.3x.(2y)^2 + (2y)^3$

$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$. (Ans.)

২। $3x - 4y$

সমাধান : $3x - 4y$

এখানে, $(3x - 4y)$ এর ঘন

$(3x - 4y)^3 = (3x)^3 - 3.(3x)^2.4y + 3.3x.(4y)^2 - (4y)^3$

$= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$ (Ans.)

৩। 397

সমাধান : 397

এখানে, 397 এর ঘন

$(397)^3 = (400 - 3)^3$

$= (400)^3 - 3.(400)^2.3 + 3.400.3^2 - (2)^3$

$= 64000000 - 1440000 + 10800 - 27$

$= 64010800 - 140027$

$= 62570773$ (Ans.)

কাজ–: [পৃষ্ঠা–৪৮]

১। $x = -2$ হলে, $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = -2$

$\therefore 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

$= (3x)^3 - 3.(3x)^2.2 + 3.3x.2^2 - (2)^3$

$= (3x - 2)^3$

$= \{3.(-2) - 2\}^3$ [মান বসিয়ে]

$= (-6 - 2)^3$

$= (-8)^3$

$= -512$ (Ans.)

২। $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হলে, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 5$ এবং $ab = 6$

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 4\{(a + b)^2 - 4ab\}$

$= (5)^3 - 3.6.5 + 4\{(5)^2 - 4.6\}$

$= 125 - 90 + 4(25 - 24)$

$= 125 - 90 + 41$

$= 129 - 90$

$= 39$ (Ans.)

৩। $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$= 2.2361 + 1.7321$

$= 3.9682$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \frac{2.2361 - 1.7321}{2} = 0.252$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = (3.9682)^3 + (0.252)^3$

$= 62.4857 + 0.0160$

$= 62.5017$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.২

১। সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

ক) $(2x+5)$ এর ঘন

সমাধান : $(2x+5)^3$

$= (2x)^3 + 3.(2x)^2.5 + 3.2x(5)^2 + (5)^3$

$= 8x^3 + 3.4x^2.5 + 3.2x.25 + 125$

$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ (Ans.)

খ) $(2x^2+3y^2)$ এর ঘন

সমাধান : $(2x^2+3y^2)^3$

$= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2.3y^2 + 3.2x^2.(3y^2)^2 + (3y^2)^3$

$= 8x^6 + 3.4x^4.3y^2 + 3.2x^2.9y^4 + 27y^6$

$= 8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4 + 27y^6$ (Ans.)

গ) $(4a-5x^2)$ এর ঘন

সমাধান : $(4a-5x^2)^3$

$= (4a)^3 - 3(4a)^2.5x^2 + 3.4a(5x^2)^2 - (5x^2)^3$

$= 64a^3 - 3.16a^2.5x^2 + 3.4a.25x^4 - 125x^6$

$= 64a^3 - 240a^2x^2 + 300ax^4 - 125x^6$ (Ans.)

ঘ) $(7m^2-2n)$ এর ঘন

সমাধান : $(7m^2-2n)^3$

$= (7m^2)^3 - 3.(7m^2)^2.2n + 3.7m^2(2n)^2 - (2n)^3$

$= 343m^6 - 3.49m^4.2n + 3.7m^2.4n^2 - 8n^3$

$= 343m^6 - 294m^4.n + 84m^2n^2 - 8n^3$ (Ans.)

ঙ) 403 এর ঘন

সমাধান : $(403)^3$

$= (400+3)3$

$= (400)^3 + 3.(400)^2.3 + 3.400(3)^2 + (3)^3$

$= 64000000 + 3.160000.3 + 3.400.9 + 27$

$= 64000000 + 1440000 + 10800 + 27$

$= 65450827$ (Ans.)

চ) 998 এর ঘন

সমাধান : $(998)^3$

$= (1000-2)^3$

$= (1000)^3 - 3.(1000)^2.2 + 3.1000(2)^2 - (2)^3$

$= 1000000000 - 3.1000000.2 + 3.1000.4 - 8$

$= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8$

$= 1000012000 - 600008$

$= 994011992$ (Ans.)

ছ) $(2a-b-3c)$ এর ঘন

সমাধান : $(2a-b-3c)^3$

$= \{(2a-b)-3c\}^3$

$= (2a-b)^3 - 3(2a-b)^2.3c + 3(2a-b).(3c)^2 - (3c)^3$

$= (2a)^3 - 3.(2a)^2.b + 3.2a(b)^2 - (b)^3 - 3.(4a^2-4ab+b^2).3c + 3(2a-b).9c^2 - 27c^3$

$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 9c(4a^2-4ab+b^2) + 27c^2(2a-b) - 27c^3$

$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 36a^2c + 36abc - 9b^2c + 54ac^2 - 27bc^2 - 27c^3$

$= 8a^3 - b^3 - 27c^3 - 12a^2b + 6ab^2 - 36a^2c - 9b^2c + 54ac^2 - 27bc^2 + 36abc$ (Ans.)

জ) $(2x+3y+z)$ এর ঘন

সমাধান : $(2x+3y+z)^3$

$= [(2x+3y)+z]^3$

$= (2x+3y)^3 + 3(2x+3y)^2.z + 3(2x+3y).z^2 + z^3$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2.3y + 3.2x(3y)^2 + (3y)^3 + 3z(2x)^2 + 2.2x.3y + (3y)^2\} + 3z^2(2x+3y) + z^3$

$= 8x^3 + 3.4x^2.3y + 3.2x.9y^2 + 27y^3 + 3z(4x^2+12xy+9y^2) + 6xz^2 + 9yz^2 + z^3$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 + 12x^2z + 36xyz + 27y^2z + 6xz^2 + 9yz^2 + z^3$

$= 8x^3 + 27y^3 + z^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 12x^2z + 27y^2z + 6xz^2 + 9yz^2 + 36xyz$ (Ans.)

২। সরল কর :

ক) $(4a-3b)^3 - 3(4a-3b)^2(2a-3b) + 3(4a-3b)(2a-3b)^2 - (2a-3b)^3$

সমাধান :

মনে করি, $(4a-3b) = x$

এবং $(2a-3b) = y$

প্রদত্তরাশি $= x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$= (x-y)^3$

$= \{(4a-3b)-(2a-3b)\}$

$= (4a-3b-2a+3b)^3$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$= (2a)^3$

$= 8a^3$. (Ans.)

খ) $(2x+y)^3 + 3(2x+y)^2(2x-y) + 3(2x+y)(2x-y)^2 + (2x-y)^3$

সমাধান :

মনে করি, $2x+y = a$

এবং $2x-y = b$

প্রদত্ত রাশি $= a^3 + 3.a^2.b + 3a.b^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a+b)^3$

$= \{(2x+y)+(2x-y)\}^3$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= (2x+y+2x-y)^3$

$= (4x)^3$

$= 64x^3$ (Ans.)

গ) $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 6x(7x + 3b)(5x + 3b)$

সমাধান : $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 3.2x(7x + 3b)(5x + 3b)$

মনে করি,

$7x + 3b = a$

এবং $5x + 3b = b$

(–) করে $2x = a - b$

প্রদত্ত রাশি $= a^3 - b^3 - 3(a - b)ab$
$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
$= (a - b)^3$
$= \{(7x + 3b) - (5x + 3b)\}^3$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= \{7x + 3b - 5x - 3b\}^3$
$= (2x)^3$
$= 8x^3$. (Ans.)

ঘ) $(x - 15)^3 + (16 - x)^3 + 3(x - 15)(16 - x)$

সমাধান : $(x-15)^3 + (16 - x)^3 + 3.1(x - 15)(16-x)$

মনে করি,

$x - 15 = a$

$16 - x = b$

(+) করে $16 - 15 = a + b$

$\therefore a + b = 1$

প্রদত্ত রাশি $= a^3 + b^3 + 3(a + b)ab$
$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$= (a + b)^3$
$= \{(x - 15) + (16 - x)\}^3$
$= (x - 15 + 16 - x)^3$
$= (1)^3 = 1$ (Ans.)

ঙ) $(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$

সমাধান :

$(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$
$= (a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 3.2(b + c)\{(a^2 - (b + c)^2\}$

মনে করি,

$a + b + c = x$

$a - b - c = y$

(–) করে $2(b + c) = x - y$

আবার, $xy = (a + b + c)(a - b - c)$
$= \{a + (b + c)\}\{a - (b + c)\}$
$= \{a^2 - (b + c)^2\}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 3(x - y)xy$
$= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
$= (x - y)^3$
$= \{2(b + c)\}^3$ [x – y এর মান বসিয়ে]
$= 8(b + c)^3$ (Ans.)

চ) $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)^2$

সমাধান : $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)$
$= (m + n)^2 - \{(m - n)^2\}^3 - 3(m^2 - n^2)^2.4mn.$

মনে করি, $(m + n)^2 = x$

$(m - n)^2 = y$

$\therefore x - y = (m + n)^2 - (m - n)^2$
$= m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2)$
$= 4mn.$

আবার, $xy = (m + n)^2(m - n)^2$
$= (m^2 - n^2)^2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
$= (x - y)^3$
$= (4mn)^3$ [x – y এর মান বসিয়ে]
$= 64m^3n^3$ (Ans.)

ছ) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$

সমাধান : $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$
$= (x^3 + y^3) + (y^3 + z^3) + (z^3 + x^3)$
$= x^3 + y^3 + y^3 + z^3 + z^3 + x^3$
$= 2x^3 + 2y^3 + 2x^3$
$= 2(x^3 + y^3 + z^3)$ (Ans.)

জ) $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

সমাধান : $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$
$= (2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 3(4x^2 - (3y - 4z)^2\}.4x$

মনে করি,

$2x + 3y - 4z = a$

এবং $2x - 3y + 4z = b$

$\therefore a + b = 2x + 3y - 4z + 2x - 3y + 4z$
$= 4x.$

আবার, $ab = (2x + 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$
$= \{2x + (3y - 4z)\}\{2x - (3y - 4z)\}$
$= \{(2x)^2 - (3y - 4z)^2\}$
$= \{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$= (a + b)^3$
$= (4x)^3$
$= 64x^3$ (Ans.)

৩। $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে, $a^3 - b^3$ এর মান কত?

সমাধান :

দেয়া আছে, $a - b = 5$

এবং $ab = 36$

$\therefore a^3 - b^3 = ?$

আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
$= (5)3 + 3.36.5$
$= 125 + 540$
$= 665$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 665.

৪। যদি $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হয়, তবে ab এর মান কত?

সমাধান :

দেয়া আছে, $a^3 - b^3 = 513$

এবং $a - b = 3$

$\therefore ab = ?$

আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

বা, $513 = (3)^3 + 3ab.3$

বা, $513 = 27 + 9ab$

বা, $9ab = 513 - 27$

বা, $9ab = 486$

বা, $ab = \frac{486}{9}$ (54)

$\therefore ab = 54$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 54.

৫। $x = 19$ এবং $y = -12$ হলে, $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $x = 19$

এবং $y = -12$

$\therefore$ ab = ?

প্রদত্ত রাশি, $8x^3 + 36x^2y + 54x^2 + 27y^3$

$= (2x)^3 + 3.(2x)^2.3y + 3.2x.(3y)^2 + (3y)^3$

$= (2x + 3y)^3$

$= \{2(19) + 3(-12)\}^3$

$= (38 - 36)^3$

$= (2)^3$

$= 8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 8.

৬। যদি $a = 15$ হয়, তবে $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$ এর মান কত?

সমাধান : $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$

$= (2a)^3 + 3.(2a)^2.5 + 3.2a.(5)^2 + (5)^3 + 5$

$= (2a + 5)^3 + 5$

$= (2.15 + 5)^3 + 5$ [a এর মান বসিয়ে]

$= (30 + 5)^3 + 5$

$= (35)^3 + 5$

$= 42875 + 5$

$= 42880$ (Ans.)

৭। $a = 7$ এবং $b = -5$ হলে, $(3a - 5b)^3 + (4b - 2a)^3 + 3(a - b)(3a - 5b)((4b - 2a)$ এর মান কত।

সমাধান :

দেয়া আছে, $a = 7$

এবং $b = -5$

মনে করি,

$3a - 5b = x$

$2x - 3y = y$

(+) করে $a - b = x + y$

প্রদত্ত রাশি $= (3a - 5b)^3 + (4b - 2a)^3 + 3(a - b)(3a - 5b)(4b - 2a)$

$= x^3 + y^3 + 3(x+y)xy$ [মান বসিয়ে]

$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$= (x + y)^3$

$= \{(3a - 5b) + (4b - 2a)\}^3$

$= (3a - 5b + 4b - 2a)^3$

$= (a - b)^3$

$= \{7 - (-5)\}^3$

$= (7 + 5)^3$

$= (12)^3$

$= 1728$ (Ans.)

৮। যদি $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.

সমাধান :

দেয়া আছে, $a + b = m$

$a^2 + b^2 = n$

এবং $a^3 + b^3 = p^3$

বামপক্ষ $= m^3 + 2p^3$

$= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$ [মান বসিয়ে]

$= (a + b)(a + b)^2 + 2(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a + b)\{(a + b)^2 + 2(a^2 - ab + b^2)\}$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2 - 2ab + 2b^2)$

$= (a + b)(3a^2 + 3b^2)$

$= (a + b)3.(a^2 + b^2)$

$= 3(a + b)(a^2 + b^2)$

$= 3$ mn.

= ডানপক্ষ।

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

৯। যদি $x + y = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 - xy = (x - y)^2$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y = 1$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 - xy$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy$

[$\because x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ মান বসিয়ে]

$= 1.(x^2 + y^2 - xy - xy)$

$= x^2 + y^2 - 2xy$

$= (x - y)^2$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১০। $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে,

(ক) $a^2 - ab + b^2$ এবং

(খ) $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 3$

এবং $ab = 2$

(খ) আমরা জানি, $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$= (3)^3 - 3.2.3$ [মান বসিয়ে]

$= 27 - 18$

$= 9$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 9

(ক) আবার,

আমরা জানি, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

বা, $9 = 3.(a^2 - ab + b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $(a^2 - ab + b^2) = \frac{9}{3}$

$\therefore a^2 - ab + b^2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 3.

১১। $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে,

(ক) $a^2 + ab + b^2$ এবং

(খ) $a^3 - b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a - b = 5$

এবং $ab = 36$

(খ) আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)^3 - 3ab(a - b)$

$= (5)^3 + 3.36.5$ [মান বসিয়ে]

$= 125 + 540$

$= 665$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 665

(ক) আবার, আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$

বা, $665 = 5(a^2 - ab + b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $(a^2 - ab + b^2) = \frac{665}{5}$ = 133

$\therefore a^2 - ab + b^2 = 133$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 133.

১২। $m+\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $m+\frac{1}{m}=a$

$\therefore m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-3m.\frac{1}{m}\left(m+\frac{1}{m}\right)$

$=(a)^3-3.a$ [যেহেতু $m+\frac{1}{m}=a$]

$=a^3-3a$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=a^3-3a$.

১৩। $x-\frac{1}{x}=p$ হলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x-\frac{1}{x}=p$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=p^3+3.p$

$=p^3+3p$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=p^3+3p$.

১৪। $a-\frac{1}{a}=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3-\frac{1}{a^3}=4$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=1$

বামপক্ষ : $a^3-\frac{1}{a^3}$

$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3a\frac{1}{a}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=(1)^3+3.1=4=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষপ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৫। যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,

ক) $a^3+b^3+c^3=3abc$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a+b+c=0$

বা, $a+b=-c$

বা, $(a+b)^3=(-c)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

বা, $a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3$ [$\because a+b=-c$]

বা, $a^3+b^3-3abc=-c^3$

বা, $a^3+b^3+c^3=3abc$ (দেখানো হলো)

খ) $\frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ac}+\frac{(a+b)^2}{3ab}=1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a+b+c=0$

$\therefore a+b=-c$

এবং $b+c=-a$

$\therefore c+a=-b$

বামপক্ষ $=\frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ca}+\frac{(a+b)^2}{3ab}$

$=\frac{a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2}{3abc}$

$=\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$

$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{3abc}$

[$\because a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$]

$=\frac{0+3abc}{3abc}=1=$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ। (দেখানো হলো)

১৬। $p-q=r$ হলে, দেখাও যে, $p^3-q^3-r^3=3pqr$

সমাধান: দেওয়া আছে, $p-q=r$

$(p-q)^3=(r)^3$ [উভয় পক্ষ কে ঘন করে]

বা, $p^3-q^3-3pq(p-q)=r^3$

বা, $p^3-q^3-3pqr=r^3$ [$\because p-q=r$]

বা, $p^3-q^3-r^3=3pqr$ (দেখানো হলো)

১৭। $2x-\frac{2}{x}=3$ হলে, দেখাও যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x-\frac{2}{x}=3$

বামপক্ষ $=8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$

$=8x^3-\frac{8}{x^3}$

$=(2x)^3-\left(\frac{2}{x}\right)^3$

$=\left(2x-\frac{2}{x}\right)^3+3.2x.\frac{2}{x}\left(2x-\frac{2}{x}\right)$

$=(3)^3+12.3$

$=27+36$

$=63$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৮। $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6-1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{6}-\sqrt{5})$ দ্বারা গুণ করে।]

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}$

[$\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$]

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

এখন, $a-\frac{1}{a}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

$\therefore \frac{a^6-1}{a^3}=\frac{a^6-1}{a^3}$

$=a^3-\frac{1}{a^3}$

$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3a.\frac{1}{a}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=(2\sqrt{5})^3+3.2\sqrt{5}$

$=8(\sqrt{5})^3+6(\sqrt{5})^3$

$=8.5\sqrt{5}+6\sqrt{5}$

$=40\sqrt{5}+6\sqrt{5}$

$=46\sqrt{5}$ (Ans.)

১৯। $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, দেখাও যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $\frac{x^6 + 1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $x^6 - 18\sqrt{3}x^3 + 1 = 0$

বা, $(x^3)^2 - 2.x^3.9\sqrt{3} + (9\sqrt{3})^2 - 242 = 0$

বা, $(x^3 - 9\sqrt{3})^2 = 242$

বা, $x^3 - 9\sqrt{3} = \sqrt{(11)^2 \times 2}$

বা, $x^3 - 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2}$

বা, $x^3 = 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$= (\sqrt{3})^3 + 3.(\sqrt{3})^2.\sqrt{2} + 3.\sqrt{3}.(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$

$= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$ [$\because (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

২০। $a^4 - a^2 + 1 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + \frac{1}{a^3} = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^4 - a^2 + 1 = 0$

বা, $\frac{a^4}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 1$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2a.\frac{1}{a} = 1$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}$

এখন, বামপক্ষ $= a^3 + \frac{1}{a^3}$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a.\frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= (\sqrt{3})^3 - 3.\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী- ৩.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : [পৃষ্ঠা-৫০]

১। $abx^2 + acx^3 + adx^4$

সমাধান: $abx^2 + acx^3 + adx^4$

$= ax^2 (b + cx + dx^2($ **(Ans.)**

২। $xa^2 - 144xb^2$

সমাধান: $xa^2 - 144xb^2$

$= x (a^2 - 144b^2)$

$= x \{(a)^2 - (12b)^2\}$

$= x(a + 12b) (a - 12b)$ **(Ans.)**

৩। $x^2 - 2xy - 4y - 4$

সমাধান: $x^2 - 2xy - 4y - 4$

$= x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 4y - 4$

$= (x - y)^2 - (y^2 + 4y + 4)$

$= (x - y)^2 - (y + 2)^2$

$= (x - y + y + 2) (x - y - y - 2)$

$= (x + 2) (x - 2y - 2)$ **(Ans.)**

❑ কাজ–: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। [পৃষ্ঠা-৫২]

১। $x^2 + x - 56$

সমাধান: $x^2 + x - 56$

$= (x^2 + 8x - 7x - 56). x (x + 8) - 7 (x + 8)$

$= x(x + 8) - 7 (x + 8)$

$= (x + 8) (x - 7)$ **(Ans.)**

২। $16x^3 - 46x^2 + 15x$

সমাধান: $16x^3 - 46x^2 + 15x$

$= x (16x^2 - 40x + 15)$

$= x (16x^2 - 40x - 6x + 15\}$

$= x \{8x (2x - 5) - 3 (2x - 5)\}$

$= x (2x - 5) (8x - 3)$ **(Ans.)**

৩। $12x^2 + 17x + 6$

সমাধান: $12x^2 + 17x + 6$

$= 12x^2 + 9x + 8x + 6$

$= 3x (4x + 3) + 2(4x + 3)$

$= (4x + 3) (3x + 2)$ **(Ans.)**

❑ কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : [পৃষ্ঠা-৫৩]

১। $2x^4 + 16x$

সমাধান: $2x^4 + 16x$

$= 2x (x^3 + 8)$

$= 2x \{(x)^3 + (2)^3.$

$= 2x (x + 2) (x^2 - x.2 + 2^2)$

$= 2x (x + 2) (x^2 - 2x + 4)$ **(Ans.)**

২। $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

সমাধান: $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

$= 8 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

$= (2)^3 - (a - b)^3$

$= \{2 - (a - b)\} \{(2)^2 + 2(a - b) + (a - b)^2\}$

$= (2 - a + b) (4 + 2a - 2b + a^2 - 2ab + b^2)$

$= (2 - a + b) (a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 4)$ **(Ans.)**

৩। $(a+b)^3+(a-b)^3$

সমাধান: $(a+b)^3+(a-b)^3$

$= \{(a+b)+(a-b)\}\{(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$

$= (a+b+a-b)\{a^2+2ab+b^2-(a^2-b^2)+a^2-2ab+b^2\}$

$= 2a(a^2+2ab+b^2-a^2+b^2+a^2-2ab+b^2)$

$= 2a(a^2+3b)^2$ (Ans.)

☐ কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : [পৃষ্ঠা–৫৩]

১। $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$

সমাধান: $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}(3x^2+7x+2)$

$=\frac{1}{6}(3x^2+6x+x+2)$

$=\frac{1}{6}\{3x(x+2)+1(x+2)\}$

$=\frac{1}{6}(x+2)(3x+1)$ (Ans.)

২। $a^3+\frac{1}{8}$

সমাধান: $a^3+\frac{1}{8}$

$=(a)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left\{a^2-a.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)$ (Ans.)

৩। $16x^2-25y^2-8xz+10yz$

সমাধান: $16x^2-25y^2-8xz+10yz$

$=(4x)^2-(5y)^2-2z(4x-5y)$

$=(4x+5y)(4x-5y)-2z(4x-5y)$

$=(4x-5y)(4x+5y-2z)$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ১। $4x^2+12x+9$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $4x^2+12x+9$

$=(2x)^2+2\times 2x\times 3+(3)^2$

$=(2x+3)^2$

$=(2x+3)(2x+3)$ (Ans.)

উদাহরণ– ২। $9x^2-30xy+25y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $9x^2-30xy+25y^2$

$=(3x)^2-2\times 3x\times 5y+(5y)^2$

$=(3x-5y)^2$

$=(3x-5y)(3x-5y)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৩। $a^2-1+2b-b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $a^2-1+2b-b^2$

$=a^2-(b^2-2b+1)$

$=a^2-(b-1)^2$

$=\{a+(b-1)\}\{a-(b-1)\}$

$=(a+b-1)(a-b+1)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৪। a^4+64b^4 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: a^4+64b^4

$=(a^2)^2+(8b^2)^2$

$=(a^2)^2+2\times a^2\times 8b^2+(8b^2)^2-16a^2b^2$

$=(a^2+8b^2)^2-(4ab)^2$

$=(a^2+8b^2+4ab)(a^2+8b^2-4ab)$

$=(a^2+4ab+8b^2)(a^2+4ab-8b^2)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৫। $x^2+12x+35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2+12x+35$

$=x^2+(5+7)x+5\times 7$

$=x^2+5x+7x+5\times 7$

$=x(x+5)+7(x+5)$

$=(x+5)(x+7)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৬। x^2-5x+6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: x^2-5x+6

$=x^2-2x-3x+6$

$=x(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(x-3)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৭। $x^2-2x-35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2-2x-35$

$=x^2-7x+5x-35$

$=x(x-7)+5(x-7)$

$=(x-7)(x+5)$ (Ans.)

উদাহরণ–৮। x^2+x-20 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: x^2+x-20

$=x^2+5x-4x-20$

$=x(x+5)-4(x+5)$

$=(x+5)(x-4)$ (Ans.)

উদাহরণ– ৯। $12x^2+35x+18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $12x^2+35x+18$

$=12x^2+27x+8x+18$

$=3x(4x+9)+2(4x+9)$

$=(4x+9)(3x+2)$ (Ans.)

উদাহরণ– ১০। $3x^2-x-14$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $3x^2-x-14$

$=3x^2-7x+6x-14$

$=x(3x-7)+2(3x-7)$

$=(3x-7)(x+2)$ (Ans.)

উদাহরণ– ১১। $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 3y+3\times 2x\times(3y)^2+(3y)^3$

$=(2x+3y)^3$

$=(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$ (Ans.)

উদাহরণ– ১২। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

i) $8a^3+27b^3$

ii) a^6-64

সমাধান:

i) $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3$
$= (2a + 3b)\{(2a)^2 - 2a \times 3b + (3b)^2\}$
$= (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (Ans.)

ii) $a^6 - 64 = (a^3)^2 - (8)^2$
$= (a^3 + 8)(a^3 - 8)$
$= (a^3 + 2^3)(a^3 - 2^3)$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) \times (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
$= (a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4) \times (a^2 - 2a + 4)$ (Ans.)

উদাহরণ– ১৩। $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
$= \{x^3 + 3.x^2.2y + 3.x(2y)^2 + (2y)^3\} - xy^2 - 2y^3$
$= (x + 2y)^3 - y^2(x + 2y)$
$= (x + 2y)\{(x + 2y)^2 - y^2\}$
$= (x + 2y)(x + 2y + y)(x + 2y - y)$
$= (x + 2y)(x + 3y)(x + y)$
$= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (১ – ৪৩) :

১। $a^2 + ab + ac + bc$

সমাধান: $a^2 + ab + ac + bc$
$= a(a + b) + c(a + b)$
$= (a + b)(a + c)$ (Ans.)

২। $ab + a - b - 1$

সমাধান: $ab + a - b - 1$
$= ab - b + a - 1$
$= b(a - 1) + 1(a - 1)$
$= (a - 1)(b + 1)$ (Ans.)

৩। $(x - y)(x + y) + (x - y)(y - z) + (x - y)(z + x)$

সমাধান:
$(x - y)(x + y) + (x - y)(y + z) + (x - y)(z + x)$
$= (x - y)(x + y + y + z + z + x)$
$= (x - y)(2x + 2y + 2z)$
$= 2(x - y)(x + y + z)$ (Ans.)

৪। $ab(x - y) - bc(x - y)$

সমাধান: $ab(x - y) - bc(x - y)$
$= (x - y)\{ab - bc\}$
$= (x - y)\{b(a - c)\}$
$= b(x - y)(a - c)$ (Ans.)

৫। $9x^2 + 24x + 16$

সমাধান: $9x^2 + 24x + 16$
$= 9x^2 + 12x + 12x + 16$
$= 3x(3x + 4) + 4(3x + 4)$
$= (3x + 4)(3x + 4)$
$= (3x + 4)^2$ (Ans.)

৬। $a^4 - 27a^2 + 1$

সমাধান: $a^4 - 27a^2 + 1$
$= (a^2)^2 - 2.a^2.1 + 1 - 25a^2$
$= (a^2 - 1)^2 - 25a^2$
$= (a^2 - 1)^2 - (5a)^2$
$= (a^2 - 1 + 5a)(a^2 - 1 - 5a)$
$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$
$= (a^2 + 5a - 1)(a^2 - 5a - 1)$ (Ans.)

৭। $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

সমাধান: $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
$= (x^2)^2 - 2.x^2.y^2 + (y)^2 - 4x^2y^2$
$= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2$
$= (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy)$
$= (x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$ (Ans.)

৮। $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$

সমাধান: $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$
$= a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2abxy$
$= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2y^2 + 2abxy - b^2x^2$
$= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) - (a^2y^2 - 2abxy - b^2x^2)$
$= \{(ax)^2 + 2.ax.by + (by)^2\} - \{(ay)^2 - 2.ay.bx + (bx)^2\}$
$= (ax + by)^2 - (ay - bx)^2$
$= \{(ax + by) + (ay - bx)\}\{ax + by) - (ay - bx)\}$
$= (ax + by + ay - bx)(ax + by - ay + bx)$ (Ans.)

৯। $4x^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2$

সমাধান: $4x^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2$
$= \{(2a)^2 - 2.2a.3b + (3b)^2\} - 4c^2$
$= (2a - 3b)^2 - (2c)^2$
$= \{(2a - 3b) + (2c)\}\{2a - 3b) - (2c)\}$
$= (2a - 3b + 2c)(2a - 3b - 2c)$ (Ans.)

১০। $9x^4 - 45a^2x^2 + 36a^4$

সমাধান: $9x^4 - 45a^2x^2 + 36a^4$
$= 9(x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4)$
$= 9(x^4 - 4a^2x^2 - a^2x^2 + 4a^4)$
$= 9\{x^2(x^2 - 4a^2) - a^2(x^2 - 4a^2)\}$
$= 9(x^2 - 4a^2)(x^2 - a^2)$
$= 9\{(x)^2 - (2a)^2\}\{(x + a)(x - a)\}$
$= 9(x + a)(x - a)(x + 2a)(x - 2a)$ (Ans.)

১১। $a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y$

সমাধান: $a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y$
$= a^2 + 6a + 9 - y^2 + 2y - 1$
$= \{(a^2) + 2.a.3 + (3)^2 - \{y^2 - 2.y.1 + 1^2\}$
$= (a + 3)^2 - (y - 1)^2$
$= \{(a + 3) + (y - 1)\}\{(a + 3) - (y - 1)\}$
$= (a + 3 + y - 1)(a + 3 - y + 1)$
$= (a + y + 2)(a - y + 4)$ (Ans.)

১২। $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$

সমাধান: $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
$= \{(4x)^2 - (5y^2)\} - 2z(4x - 5y\}$
$= (4x + 5y)(4x - 5y) - 2z(4x - 5y)$
$= 4x - 5y)\{(4x + 5y) - 2z\}$
$= (4x - 5y)(4x + 5y - 2z)$ (Ans.)

১৩। $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

সমাধান: $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$= 4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$= 4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)$
$= (2bc)^2 - \{(a^2)^2 + (-b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2.(a^2).(-b^2) + 2(-b^2).(-c^2) + 2(-c^2).a^2\}$

$= (2bc)^2 - \{(a^2) + (-b^2) + (-c^2)\}^2$
$= (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)$
$= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$
$= \{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\}\{b^2 + 2bc + c^2 - a^2\}$
$= \{(a)^2 - (b - c)^2\}\{(b + c)^2 - (a)^2\}$
$= (a + b - c)(a - b + c)(b + c + a)(b + c - a)$
$= (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$ (Ans.)

১৪। $x^2 + 13x + 36$

সমাধান : $x^2 + 13x + 36$
$= x^2 + 4x + 9x + 36$
$= x(x + 4) + 9(x + 4)$
$= (x + 4)(x + 9)$ (Ans.)

১৫। $x^4 + x^2 - 20$

সমাধান : $x^4 + x^2 - 20$
$= x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20$
$= x^2(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5)$
$= (x^2 + 5)(x^2 - 4)$
$= (x^2 + 5)\{(x)^2 - (2)^2\}$
$= (x^2 + 5)(x + 2)(x - 2)$ (Ans.)

১৬। $a^2 - 30a + 216$

সমাধান : $a^2 - 30a + 216$
$= a^2 - 12a - 18a + 216$
$= a(a - 12) - 18(a - 12)$
$= (a - 12)(a - 18)$ (Ans.)

১৭। $x^6y^6 - x^3y^3 - 6$

সমাধান : $x^6y^6 - x^3y^3 - 6$
$= x^6y^6 - 3x^3y^3 + 2x^3y^3 - 6$
$= x^3y^3(x^3y^3 - 3) + 2(x^3y^3 - 3)$
$= x^3y^3(x^3y^3 - 3) + 2(x^3y^3 - 3)$
$= (x^3y^3 - 3)(x^3y^3 + 2)$ (Ans.)

১৮। $a^8 - a^4 - 2$

সমাধান : $a^8 - a^4 - 2$
$= a^8 - 2a^4 + a^4 - 2$
$= a^4(a^4 - 2) + 1(a^4 - 2)$
$= (a^4 - 2)(a^4 + 1)$ (Ans.)

১৯। $a^2b^2 - 8ab - 105$

সমাধান : $a^2b^2 - 8ab - 105$
$= a^2b^2 - 15ab + 7ab - 105$
$= ab(ab - 15) + 7(ab - 15)$
$= (ab - 15)(ab + 7)$ (Ans.)

২০। $x^2 - 37x - 650$

সমাধান : $x^2 - 37x - 650$
$= x^2 - 50x + 13x - 650$
$= x(x - 50) + 13(x - 50)$
$= (x - 50)(x + 13)$ (Ans.)

২১। $4x^4 - 25x^2 + 36$

সমাধান : $4x^4 - 25x^2 + 36$
$= 4x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 36$
$= 4x^2(x^2 - 4) - 9(x^2 - 4)$
$= (x^2 - 4)(4x^2 - 9)$
$= \{(x)^2 - (2)^2\}\{(2x)^2 - (3)^2\}$
$= \{(x + 2)(x - 2)\}\{(2x + 3)(2x - 3)\}$
$= (x + 2)(x - 2)(2x + 3)(2x - 3)$ (Ans.)

২২। $12x^2 - 38x + 20$

সমাধান : $12x^2 - 38x + 20$
$= 2(6x^2 - 19x + 10)$
$= 2(6x^2 - 15x - 4x + 10)$
$= 2\{3x(2x - 5) - 2(2x - 5)\}$
$= 2(2x - 5)(3x - 2)$
$= (2x - 5)(6x - 4)$ (Ans.)

২৩। $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$

সমাধান : $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$
$= y^2\{9x^2 - 5x - 14\}$
$= y^2\{9x^2 + 9x - 14x - 14\}$
$= y^2\{9x(x + 1) - 14(x + 1)\}$
$= y^2(x + 1)(9x - 14)$ (Ans.)

২৪। $4x^4 - 27x^2 - 81$

সমাধান : $4x^4 - 27x^2 - 81$
$= 4x^4 - 36x^2 + 9x^2 - 81$
$= 4x^2(x^2 - 9) + 9(x^2 - 9)$
$= (4x^2 + 9)(x^2 - 9)$
$= (4x^2 + 9)\{(x)^2 - (3)^2\}$
$= (4x^2 + 9)(a + 3)(x - 3)$ (Ans.)

২৫। $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$

সমাধান : $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$
$= ax^2 + a^2x + x + a$
$= ax(x + a) + 1(x + a)$
$= (x + a)(ax + 1)$ (Ans.)

২৬। $3(a^2 + 2a)^2 - 22(a^2 + 2a) + 40$

সমাধান : মনে করি, $a^2 + 2a = x$
প্রদত্ত রাশি, $3x^2 - 22x + 40$
$= 3x^2 - 12x - 10x + 40$
$= 3x(x - 4) - 10(x - 4)$
$= (x - 4)(3x - 19)$
$= (a^2 + 2a - 4)\{3(a^2 + 2a) - 10\}$
$= (a^2 + 2a - 4)(3a^2 + 6a - 10)$
$= (a^2 + 2a - 4)(3a^2 + 6a - 10)$ (Ans.)

২৭। $14(x + z)^2 - 29(x + z)(x + 1) - 15(x + 1)^2$

সমাধান : মনে করি,
$x + z = a$
$x + 1 = b$
প্রদত্ত রাশি $= 14a^2 - 29ab - 15b^2$
$= 14a^2 - 35ab + 6ab - 15b^2$
$= 7a(2a - 5b) + 3b(2a - 5b)$
$= (2a - 5b)(7a + 3b)$
$= \{2(x + z) - 5(x + 1)\}\{7(x + z) + 3(x + 1)\}$
[a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (2x + 2z - 5x - 5)(7x + 7z + 3x + 3)$
$= (2z - 3x - 5)(10x + 7z + 3)$ (Ans.)

২৮। $(4a - 3b)^2 - 2(4a - 3b)(a + 2b) - 35(a + 2b)^2$

সমাধান : মনে করি,
$4x - 3b = x$
$a + 2b = y$
প্রদত্ত রাশি $= x^2 - 2xy - 35y^2$
$= x^2 - 7xy + 5xy - 35y^2$
$= x(x - 7y) + 5y(x - 7y)$
$= (x - 7y)(x + 5y)$
$= \{(4x - 3b) - 7(a + 2b)\}\{(4a - 3b) + 5(a + 2b)\}$
$= (4a - 3b - 7a - 14b)(4a - 3b + 5a + 10b)$
$= (-3a - 17b)(9a + 7b)$
$= -(3a + 17b)(9a + 7b)$ (Ans.)

২৯। $(a - 1)x^2 + a^2xy + (a + 1)y^2$

সমাধান :
মনে করি, $a - 1 = p$
এবং $a + 1 = q$
(গুণ করে) $a^2 - 1 = pq$
বা, $a^2 = pq + 1$

প্রদত্ত রাশি $= px^2 + (pq + 1) xy + qy^2$
$= px^2 + pqxy + xy + qy^2$
$= px (x + 2y) + y (x + 2y)$
$= (x + 2y) (px + y)$
$= \{x + (a + 1) y\} \{(a - 1) x + y\}$ [p ও q এর মান বসিয়ে]
$= (x + ay + y) (ax - x + y)$
$= (x + ay + y) (ax - x + y)$ (Ans.)

৩০। $24x^4 - 3x$

সমাধান : $24x^4 - 3x$
$= 3x(8x^3 - 1)$
$= 3x\{(2x)^3 - (1)^3\}$
$= 3x\{(2x - 1) \{(2x)^2 + 2x.1 + (1)^2\}$
$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)]$
$= 3x (2x - 1) (4x^2 + 2x + 1)$ (Ans.)

৩১। $(a^2 + b^2)^3 + 8a^3b^3$

সমাধান : $(a^2 + b^2)^3 + 8a^3b^3$
$= (a^2 + b^2)^3 + (2ab)^3$
$= (a^2 + b^2 + 2ab) \{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2).2ab + (2ab)^2\}$
$= (a + b)^2\{(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - 2a^3b - 2ab^3 + 4a^2b^2\}$
$= (a + b)^2 \{(a^2)^2 + 2a^2.b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3 + 4a^2b^2\}$
$= (a + b)^2 (a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 2a^3b - 2ab^3)$ (Ans.)

৩২। $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

সমাধান : $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1$
$= (x)^3 + 3.(x)^2.1 + 3x.(1)^2 + (1)^3 + 1$
$= (x + 1)^3 + (1)^3$
$= (x + 1 + 1) \{(x + 1)^2 - (x + 1).1 + (1)^2\}$
$= (x + 2) (x^2 + 2x + 1 - x - \cancel{1} + \cancel{1})$
$= (x + 2) (x^2 + x + 1)$ (Ans.)

৩৩। $a^3 - 6a^2 + 12a - 9$

সমাধান : $a^3 - 6a^2 + 12a - 9$
$= a^3 - 3a^2 - 3a^2 + 9a + 3a - 9$
$= a^2(a - 3) - 3a (a - 3) + 3(a - 3)$
$= (a - 3) (a^2 - 3a + 3)$ (Ans.)

৩৪। $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$

সমাধান : $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$
$= a^3 - 8b^3 - b^3 + (a + b)^3$
$= a^3 - b^3 + (a + b)^3 - 2b)^3$
$= (a - b).(a^2 + ab + b^2) + (a + b - 2b)$
$\{a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2\}$
$= (a - b) (a^2 + ab + b^2) + (a - b) (a^2 + 4ab + 7b^2)$
$= (a - b) (a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$
$= (a - b) (2a^2 + 5ab + 8b^2)$ (Ans.)

৩৫। $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63.$

সমাধান : $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$
$= (2x)^3 + 3(2x)^2.1 + 3.2x.1^2 + 1^3 - 64$
$= (2x + 1)^3 - (4)^3$
$= (2x + 1 - 4) \{(2x + 1)^2 + (2x + 1).4 + (4)^2\}$
$= (2x - 3) (4x^2 + 4x + 1 + 8x + 4 + 16)$
$= (2x - 3) (4x^2 + 12x + 21)$ (Ans.)

৩৬। $8a^3 + \frac{b^3}{27}$

সমাধান : $8a^3 + \frac{b^3}{27}$
$= (2a)^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$
$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left\{(2a)^2 - 2a.\frac{b}{3} + \left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}$
$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(4a^2 - \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{9}\right)$
$= \left(\frac{6a + b}{3}\right)\left(\frac{36a^2 - 6ab + b^2}{9}\right)$
$= \frac{1}{27}(6a + b)(36a^2 - 6ab + b^2)$ (Ans.)

৩৭। $a^3 - \frac{1}{8}$

সমাধান : $a^3 - \frac{1}{8}$
$= (a)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= \left(a - \frac{1}{2}\right)\left\{(a)^2 + a.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$
$= \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)$
$= \left(\frac{2a - 1}{2}\right)\left(\frac{4a^2 + 2a + 1}{4}\right)$
$= \frac{1}{8}(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$ (Ans.)

৩৮। $\frac{a^6}{27} - b^6$

সমাধান : $\frac{a^6}{27} - b^6$
$= \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 - (b^2)^3$
$= \left(\frac{a^2}{2} - b^2\right)\left\{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}.b^2 + (b^2)^2\right\}$
$= \left(\frac{a^2}{2} - b^2\right)\left(\frac{a^4}{9} + \frac{a^2b^2}{3} + b^4\right)$ (Ans.)

৩৯। $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$

সমাধান : $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$
$= 4a^2 - 2 + \frac{1}{4a^2} + 4a - \frac{1}{a}$
$= (2a)^2 - 2.2a.\frac{1}{2a} + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$
$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$
$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)\left(2a - \frac{1}{2a} + 2\right)$ (Ans.)

৪০ | $(3a+1)^3-(2a-3)^3$

সমাধান : $(3a+1)^3-(2a-3)^3$
$=\{(3a+1)-(2a-3)\}\{(3a+1)^2+(3a+1)(2a-3)+(2a-3)^2\}$
$=(3a+1-2a+3)\{(3a)^2+2.3a.1+1^2+(6a^2-9a+2a-3)+(2a)^2-2.2a.3+(3)^2\}$
$=(a+4)\{9a^2+6a+1+6a^2-7a-3+4a^2-12a+9\}$
$=(a+4)(19a^2-13a+7)$ (Ans.)

৪১ | $(x+5)(x-9)-15$

সমাধান : $(x+5)(x-9)-15$
$=x^2-9x+5x-45-15$
$=x^2-4x-60$
$=x^2-10x+6x-60$
$=x(x-10)+6(x-10)$
$=(x-10)(x+6)$ (Ans.)

৪২ | $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

সমাধান : $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-48$
$=(x^2+5x+2x+10)(x^2+4x+3x+12)$
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
মনে করি, $x^2+7x=x$
প্রদত্ত রাশি, $(x+10)(x+12)-48$
$=x^2+12x+10x+120-48$
$=x^2+22x+72$
$=x^2+18x+4x+72$
$=x(x+18)+4(x+18)$
$=(x+18)(x+4)$
$=(x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ [∵ x এর মান বসিয়ে]
$=(x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ (Ans.)

৪৩ | $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-65$

সমাধান : $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-65$
$=(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)-65$
$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-65$
মনে করি, $x^2-8=1$
∴ প্রদত্ত রাশি : $(a+7)(a+15)-65$
$=a^2+22a+105-65$
$=a^2+22a+40$
$=a^2+20a+2a+40$
$=a(a+20)+2(a+20)$
$=(a+20)(a+2)$
$=(x^2-8+20)(x^2-8+2)$ [a এর মান বসিয়ে] (Ans.)

৪৪ | দেখাও যে, $x^3+9x^2+26x+24=(x+2)(x+3)(x+4)$

সমাধান :
বামপক্ষ $=x^3+9x^2+26x+24$
$=x^3+2x^2+26x+24$
$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$
$=(x+2)(x^2+7x+12)$
$=(x+2)(x^2+3x+4x+12)$
$=(x+2)\{x(x+3)+4(x+3)\}$
$=(x+2)(x+3)(x+4)$
= ডানপক্ষ
∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

৪৫ | দেখাও যে, $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)=(3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$

সমাধান :
বামপক্ষ $=(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)$
$=(x+1)(3x-1)(x+2)(3x-4)$
$=(3x^2-x+3x-1)(3x^2-4x+6x-8)$
$=(3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$
$=(3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$
= ডানপক্ষ
∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

অনুশীলনী- ৩.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : [পৃষ্ঠা-৫৮]

১ | $x^3-21x-20$

সমাধান : $x^3-21x-20$
ধরি, $f(x)=x^3-21x-20$
তাহলে $f(-1)=(-1)-21.(-1)-20$
$=-1+21-20$
$=-20+20=0$
∴ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক
এখন, $x^3-21x-20$
$=x^3+x^2-x^2-x-20x-20$
$=x^2(x+1)-x(x+1)-20(x+1)$
$=(x+1)(x^2-x-20)$
$=(x+1)(x^2-5x+4x-20)$
$=(x+1)\{x(x-5)+4(x-5)\}$
$=(x+1)(x-5)(x+)$ (Ans.)

২ | $2x^3-3x^2+3x-1$

সমাধান : $2x^3-3x^2+3x-1$
ধরি, $f(x)=2x^3-3x^2+3x-1$
তাহলে, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2.\left(\frac{1}{2}\right)^3-3.\left(\frac{1}{2}\right)^2+3.\left(\frac{1}{2}\right)-1$
$=2\times\frac{1}{8}-3.\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-1$
$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}-1$
$=\frac{1-3+6-4}{4}=\frac{0}{4}=0$
∴ $(2x-1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক
এখন, $2x^3-3x^2+3x-1$

$= 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1$
$= x^2(2x - 1) - x(2x - 1) + 1(2x - 1)$
$= (2x - 1)(x^2 - x + 1)$ (Ans.)

৩। $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

সমাধান : $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
ধরি, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
তাহলে, $f(-1) = (-1)^3 + 6.(-1)^2 + 11.(-1) + 6$
$= -1 + 6 - 11 + 6$

$\therefore$ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক
এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
$x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$
$x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$
$(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$
$(x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$
$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$
$= (x + 1)(x + 3)(x + 2)$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ১। $x^3 - x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, $f(x) = x^3 - x - 6$ একটি বহুপদী। এর ধ্রুবপদ -6এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6.
এখন, $x = 1, -1$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।
কিন্তু $x = 2$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $f(2) = 2^3 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$
সুতরাং, $x - 2$, $f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাক।
$\therefore$ $f(x) = x^3 - x - 6$
$= x^3 - 2x$ [illegible] $2x^2$ [illegible]
$= x^2(x -$ [illegible] $+ 2x($ [illegible] $2)$
$= (x - 2)($ [illegible] $+ 2x +$ [illegible]

উদাহরণ– ২। $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।
প্রদত্ত রাশিকে x-এর বহুপদী বিবেচনা করে
ধরি, $f(x) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3$
তাহলে, $f(y) = y^3 - 3y.y^2 + 2y^3$
$= 3y^3 - 3y^3 = 0$
$\therefore$ $(x - y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$
$= x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 - 2xy^2 + 2y^2$
$= x^2(x - y) + xy)x - y) - 2y^2(x - y)$
$= (x - y)(x^2 + xy - 2y^2)$

আবার,
ধরি, $g(x) = x^2 + xy - 2y^2$
$\therefore$ $g(y) = y^2 + y^2 - 2y^2 = 0$
$\therefore$ $(x - y)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক
$\therefore$ $x^2 + xy - 2y^2$
$= x^2 - xy + 2xy - 2y^2$
$= x(x - y) + 2y(x - y)$
$= (x - y)(x + 2y)$
$\therefore$ $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x - y)^2(x + 2y)$ (Ans.)

উদা[illegible] $27x^3$[illegible] $16x - 8a$ কে উৎপাদকে [illegible] কর।

সমাধান : ধরি, $f(x)) = 54x$ [illegible] $+ 27x^3a - 16x - 8a$
তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = 54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4 + 27a\left(-\frac{1}{2}a\right)^3 -$
$16\left(-\frac{1}{2}a\right) - 8a = \frac{27}{8}a^4 \frac{-27}{8}a^4 + 8a - 8a = 0$
$\therefore$ $x - \left(-\frac{1}{2}a\right) = x + \frac{a}{2}$
অর্থাৎ, $2x + a$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$
$= 27x^3(2x + a) - 8(2x + a)$
$= (2x + a)(27x^3 - 8)$
$= (2x + a)\{(3x)^3 - (2)^3\}$
$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $6x^2 - 7x + 1$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 6x^2 - 7x + 1$
মনে করি, $f(x) = 6x^2 - 7x + 1$ একটি বহুপদী
এখানে, $x = 1$ বসালে, $f(1) = 6.1^2 - 7.1 + 1$
$= 6 - 7 + 1$
$= 0$
সুতরাং $(x - 1)$, $f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।
এখন, $6x^2 - 7x + 1$
$= 6x^2 - 6x - x + 1$
$= 6x(x - 1) - 1(x - 1)$
$= (x - 1)(6x - 1)$
অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 1)(6x - 1)$

২। $3a^3 + 2a + 5$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 3a^3 + 2a + 5$
মনে করি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$
এখানে, $a = -1$ বসালে, $f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1) + 5$
$= -3 - 2 + 5$
$= -5 + 5$
$= 0$
সুতরাং $(x + 1)$, $f(a)$ বহুপদটির একটি উৎপাদক।
এখন, $3a^3 + 2a + 5$
$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$
$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$
$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$
অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$

৩। $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 7xy^2 - 6y^3$
মনে করি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$
এখানে,
$x = -y$ বসালে, $f(-y) = (-y)^3 - 7(-y).y^2 - 6y^3$
$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3$
$= 7y^3 - 7y^3$
$= 0$

$\therefore (x + y)$, $f(x)$ বহুপদটির একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$

$= x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$

$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2)$

$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$

$= (x + y)\{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\}$

$= (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$

৪। $x^2 - 5x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^2 - 5x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^2 - 5x - 6$

এখানে, $x = 6$ বসালে, $f(6) = (6)^2 - 5.(6) - 6$
$= 36 - 30 - 6$
$= 36 - 36$
$= 0$

$\therefore (x - 6)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^2 - 5x - 6$

$= x^2 - 6x + x - 6$

$= x(x - 6) + 1(x - 6)$

$= (x - 6)(x + 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 6)(x + 1)$

৫। $2x^2 - x - 3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 2x^2 - x - 3$

মনে করি, $f(x) = 2x^2 - x - 3$

এখানে, $x = -1$ বসালে,

$f(-1) = 2.(-1)^2 - (-1) - 3$
$= 2 + 1 - 3$
$= 3 - 3$
$= 0$

$\therefore (x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore x^2 - x - 3$

$= 2x^2 + 2x - 3x - 3$

$= 2x(x + 1) - 3(x + 1)$

$= (x + 1)(2x - 3)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x + 1)(2x - 3)$

৬। $3x^2 - 7x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 3x^2 - 7x - 6$

মনে করি, $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$

এখানে, $x = 3$ বসালে, $f(3) = 3(3)^2 - 7(3) - 6$
$= 27 - 21 - 6$
$= 0$

$\therefore (x - 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $3x^2 - 7x - 6$

$= 3x^2 - 9x + 2x - 6$

$= 3x(x - 3) + 2(x - 3)$

$= (x - 3)(3x + 2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 3)(3x + 2)$

৭। $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6$
$= 8 + 8 - 10 - 6$
$= 16 - 16$
$= 0$

$\therefore (x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6$

$= x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x - 2)(x^2 + 3x + x + 3)$

$= (x - 2)\{x(x + 3) + 1(x + 3)\}$

$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

৮। $x^3 + 4x^2 + x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 4x^2 + x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

এখানে, $x = 1$ বসালে, $f(1) = 1^3 + 4.1^2 + 1 - 6$
$= 1 + 4 + 1 - 6$
$= 6 - 6$
$= 0$

$\therefore (x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6$

$= x^2(x - 1) + 5x(x - 1) + 6(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x - 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x - 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

৯। $a^3 + 3a + 36$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= a^3 + 3a + 36$

মনে করি, $f(a) = a^3 + 3a + 36$

এখানে, $a = -3$ বসালে,

$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) + 36$
$= -27 - 9 + 36$
$= -36 + 36$
$= 0$

$\therefore (x + 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3 + 3a + 36$

$= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36$

$= a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + 12(a + 3)$

$= (a + 3)(a^2 - 3a + 12)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a + 3)(a^2 - 3a + 12)$

১০। $a^4 - 4a + 3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= a^4 - 4a + 3$

মনে করি, $f(a) = a^4 - 4a + 3$

এখানে, $a = 1$ বসালে, $f(1) = (1)^4 - 4.1 + 3$
$= 1 - 4 + 3$
$= 4 - 4$
$= 0$

$\therefore (a - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^4 - 4a + 3$

$= a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a - 3a + 3$

$= a^3(a - 1) + a^2(a - 1) + a(a - 1) - 3(a - 1)$

$= (a - 1)(a^3 + a^2 + a - 3)$

আবার, মনে করি, $f'(a) = a^3 + a^2 + a - 3$

এখানে, $a = 1$ বসালে, $f'(a) = (1)^3 + 1^2 + 1 - 3$
$= 0$

$\therefore (a - 1)$ $f'(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3 + a^2 + a - 3$

$= a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a + 3a - 3$

$= a^2(a - 1) + 2a(a - 1) + 3(a - 1)$

$= (a - 1)(a^2 + 2a + 3)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a - 1)(a - 1)(a^2 + 2a + 3)$

১১। $a^3 - a^2 - 10a - 8$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= a^3 - a^2 - 10a - 8$

মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

এখানে, $a = -1$ বসালে,

$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$
$= -1 - 1 + 10 - 8$
$= 10 - 10$
$= 0$

$\therefore$ $(a + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$= a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 8a - 8$
$= a^2(a + 1) - 2a(a + 1) - 8(a + 1)$
$= (a + 1)(a^2 - 2a - 8)$
$= (a + 1)(a^2 - 2a - 8)$
$= (a + 1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$
$= (a + 1)\{a(a - 4) + 2(a - 4)\}$
$= (a + 1)(a - 4)(a + 2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a + 1)(a - 4)(a + 2)$

১২। $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4.2 - 4$
$= 8 - 12 + 8 - 4$
$= 16 - 16$
$= 0$

$\therefore$ $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4$
$= x^2(x - 2) - x(x - 2) + 2(x - 2)$
$= (x - 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 2)(x^2 - x + 2)$

১৩। $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

মনে করি, $f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

এখানে, $a = b$ বসালে $f(b) = b^3 - 7b^3 + 7b^3 - b^3$
$= 8b^3 - 8b^3$
$= 0$

$\therefore$ $(a - b)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

$= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6a^2b^2 + ab^2 - b^3$
$= a^2(a - b) - 6ab(a - b) + b^2(a - b)$
$= (a - b)(a^2 - 6ab + b^2)$
$= (a - b)(a^2 - 6ab + b^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a - b)(a^2 - 6ab + b^2)$

১৪। $x^3 - x - 24$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 - x - 24$

মনে করি, $f(x) = x^3 - x - 24$

এখানে, $x = 3$ বসালে, $f(3) = (3)^3 - 3 - 24$
$= 27 - 27$
$= 0$

$\therefore$ $(x - 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - x - 2y$

$= x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24$
$= x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 8(x - 3)$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 8)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 3)(x^2 + 3x + 8)$

১৫। $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

এখানে, $x = -y$ বসালে,

$f(-y) = (-y)^3 - 6(-y)^2.y + 11(-y).y^2 + 6y^3$
$= -y^3 + 6y^3 - 11y^3 + 6y^3$
$= 12y^3 - 12y^3$
$= 0$

$\therefore$ $(x + y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

$= x^3 + x^2y + 5x^2y + 5xy^2 + 6xy^2 + 6y^3$
$= x^2(x + y) + 5xy(x + y) + 6xy^2(x + y)$
$= (x + y)(x^2 + 5xy + 6y^2)$
$= (x + y)(x^2 + 2xy + 3xy + 6y^2)$
$= (x + y)\{x(x + 2y) + 3y(x + 2y)\}$
$= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)$

১৬। $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = 2.2^4 - 3.2^3 - 3.2 - 2$
$= 32 - 24 - 6 - 2$
$= 32 - 32$
$= 0$

$\therefore$ $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$
$= 2x^3(x - 2) + x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 1(x - 2)$
$= (x - 2)(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$
$= (x - 2)\{x^2(2x + 1) + 1(2x + 1)\}$
$= (x - 2)(2x + 1)(x^2 + 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 2)(2x + 1)(x^2 + 1)$

১৭। $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

এখানে, $x = -2$ বসালে,

$f(-2) = 4(-2)^4 + 12(-2)^3 + 7(-2)^2 - 3(-2) - 2$
$= 4.16 - 12.8 + 28 + 6 - 2$
$= 64 - 96 + 28 + 6 - 2$
$= 98 - 98$
$= 0$

$\therefore$ $(x + 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$= 4x^4 + 8x^3 + 4x^3 + 8x^2 - x^2 - 2x - x - 2$
$= 4x^3(x + 2) + 4x^2(x + 2) - x(x + 2) - 1(x + 2)$
$= (x + 2)(4x^3 + 4x^2 - x - 1)$
$= (x + 2)\{4x^2(x + 1) - 1(x + 1)$
$= (x + 2)(x + 1)(4x^2 - 1)$
$= (x + 2)(x + 1)\{(2x)^2 - 1^2\}$
$= (x + 2)(x + 1)(2x + 1)(2x - 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x - 1)$

১৮। $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$
$= x(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$
$= x\{x^4(x-1) + x^2(x-1) + 1(x-1)\}$
$= x(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$
$= x(x-1)\{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + (1)^2 - x^2\}$
$= x(x-1)\{(x^2+1)^2 - (x)^2\}$
$= x(x-1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)$
$= x(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= x(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

১৯। $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

সমাধান :
প্রদত্ত রাশি $= 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$
মনে করি, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$.

এখানে $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4.\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5.\frac{1}{4} - 1$
$= 4.\frac{1}{64} - 5.\frac{1}{16} + \frac{5}{4} - 1$
$= \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$
$= \frac{1-5+20-16}{16}$
$= \frac{21-21}{16}$
$= \frac{0}{16} = 0$

∴ $x - \frac{1}{4} = 4x - 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

∴ $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$
$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$
$= x^2(4x-1) - x(4x-1) + 1(4x-1)$
$= (4x-1)(x^2 - x + 1)$
∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (4x-1)(x^2-x+1)$

২০। $8x^3 + 15x^2 - x - 2$.

সমাধান
প্রদত্ত রাশি $= 8x^3 + 15x^2 - x - 2$
মনে করি, $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

এখানে $f\left(\frac{1}{3}\right) = 18\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 2$
$= 18.\frac{1}{27} + 15.\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 2$
$= \frac{18}{27} + \frac{15}{9} - \frac{1}{3} - 2$
$= \frac{18+45-9-54}{27}$
$= \frac{63-63}{27}$
$= \frac{0}{27} = 0$

∴ $x - \frac{1}{3} = 3x - 1$
$f(x)$ এর একটি উৎপাদক
∴ $18x^3 + 15x^2 - x - 2$
$= 6x^2(3x-1) + 7x(3x-1) + 2(3x-1)$
$= (3x-1)(6x^2 + 7x + 2)$
$= (3x-1)(6x^2 4x + 3x + 2)$
$= (3x-1)\{2x(3x+2) + 1(3x+2) = (3x-1)(3x+2)(2x+1)$
∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (3x-1)(3x+2)(2x+1)$

অনুশীলনী- ৩.৫

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ–১: এক ব্যক্তি স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ঘণ্টায় 2 কি.মি. বেগে যেতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কি.মি. হলে, স্রোতের অনুকূলে 32 কি.মি. যেতে তার কত সময় লাগে? [পৃষ্ঠা– ৬৩]

সমাধান : মনে করি,
দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
এবং স্রোতের " " y কি.মি.
স্রোতের অনুকূলে বেগ ঘণ্টায় $(x + y)$ কি.মি.
স্রোতের প্রতিকূলে বেগ ঘণ্টায় $(x - y)$ কি.মি.
দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় = 3 কি.মি.
অর্থাৎ $y = 3$ কি.মি.
প্রশ্নানুসারে, $x - y = 2$
বা, $x - 3 = 2$
বা, $x = 2 + 3$
∴ $x = 5$
∴ দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 5 কি.মি.
∴ স্রোতের অনুকূলে বেগ ঘণ্টায় $(5 + 3)$ কি.মি.
বা, ৪ কি.মি.
মনে করি, স্রোতের অনুকূলে 32 কি.মি. যেতে তার d ঘণ্টা সময় লাগবে।
জানা আছে, বেগ × সময় = দূরত্ব
প্রশ্নানুসারে, $8 \times d = 32$
বা, $d = \frac{32}{8}$
∴ $d = 4$
∴ নির্ণেয় সময় 4 ঘণ্টা

কাজ-২: টাকায় 10টি লেবু বিক্রয় করায় n% ক্ষতি হয়। z% লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে? [পৃষ্ঠা-৬৫]

সমাধান: মনে করি, 10টি লেবুর ক্রয়মূল্য p টাকা

n% ক্ষতিতে 10টি লেবুর বিক্রয়মূল্য

$= (p - p \text{ এর } n\%)$ টাকা

$= \left(p - p \text{ এর } \frac{n}{100}\right)$ টাকা

$= \left(p - \frac{pn}{100}\right)$ টাকা

$= \frac{100p - pn}{100}$ টাকা

$= \frac{p(100-n)}{100}$ টাকা

প্রশ্নমতে $= \frac{p(100-n)}{100} = 1$

বা, $p(100-n) = 100$

$\therefore p = \frac{100}{100-n}$

$\therefore$ 10টি লেবুর ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100-n}$ টাকা

$\therefore$ z% লাভে 10টি লেবুর বিক্রয়মূল্য

$= \left(\frac{100}{100-n} + \frac{100}{100-n} \text{ এর } z\%\right)$ টাকা

$= \left(\frac{100}{100-n} + \frac{100}{100-n} \text{ এর } \frac{z}{100}\right)$ টাকা

$= \left(\frac{100}{100-n} + \frac{z}{100-n}\right)$ টাকা

$= \frac{100+z}{100-n}$ টাকা

$\frac{100+z}{100-n}$ টাকায় 10টি লেবু বিক্রয় করলে,

টাকায় বিক্রয় করতে হবে $\frac{10(100-n)}{100+z}$ টি লেবু। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান :

n% ক্ষতিতে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 − n) টাকা

1 টাকায় বিক্রি করে 10টি লেবু

$\therefore$ (100 − n) " " 10(100 − n) টি লেবু

আবার,

z% লাভে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + z)

$\therefore$ z% লাভ করতে হলে,

(100 + z) টাকায় বিক্রি করতে হবে 10 (100 − n)টি লেবু

1 " " " " $\frac{10(100-n)}{100+z}$ টি লেবু

সুতরাং টাকায় $\frac{10(100-n)}{100+z}$টি লেবু বিক্রি করতে হবে।

৩। বার্ষিক শতকরা $6\frac{1}{2}\%$ হার সরল মুনাফার 750 টাকার 4 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত টাকা হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

সরল মুনাফার হার, $r = 6\frac{1}{2}\% = \frac{13}{2}\%$

$= \frac{13}{2 \times 100}$

$= \frac{13}{200}$

মূলধন, p = 750 টাকা

সময়, n = 4 বছর

জানা আছে,

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

সবৃদ্ধিমূল, $s = p(1 + nr)$

$= 750\left(1 + 4 \times \frac{13}{200}\right)$ টাকা

$= 750\left(1 + \frac{13}{50}\right)$ টাকা

$= 750 \times \frac{63}{50}$ টাকা

945 টাকা **(Ans.)**

৪। বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

মুনাফার হার, $r = 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

মূলধন, p = 2000 টাকা।

সময়, n = 3 বছর।

জানা আছে,

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

সবৃদ্ধিমূল, $c = p(1 + r)^n$

$= 2000\left(1 + \frac{1}{25}\right)^3$

$= 2000 \times \left(\frac{26}{25}\right)^3$ টাকা

$= 2000 \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25}$ টাকা

$= \frac{16 \times 26 \times 26 \times 26}{125}$ টাকা

= 2249.728 টাকা **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৩.৫

১। $x^2 - 7x + 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?
ক) $(x-2)(x-3)$ খ) $(x-1)(x+8)$
গ) $(x-1)(x-6)$ ঘ) $(x+1)(x+6)$
উত্তর : গ) $(x-1)(x-6)$

২। $f(x) = x^2 - 4x + 4$ হলে, $f(2)$ এর মান নিচের কোনটি?
ক) 4 খ) 2
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর : ঘ) 0

৩। $x + y = x - y$ হলে, y এর মান নিচের কোনটি?
ক) -1 খ) 0
গ) 1 ঘ) 2
উত্তর : খ) 0

৪। $\frac{x^2+3x^3}{x+3x^2}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি?
ক) x^2 খ) x
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর : খ) x

৫। $\frac{1-x^2}{1-x}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি?
ক) 1 খ) x
গ) $(1-x)$ ঘ) $(1+x)$
উত্তর : ঘ) $(1+x)$

৬। $\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2-(a-b)^2\right\}$ এর মান নিচের কোনটি?
ক) $2(a^2+b^2)$ খ) a^2+b^2
গ) 2ab ঘ) 4ab
উত্তর : গ) 2ab

৭। $x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^3 + \frac{8}{x^3}$ এর মান কত?
ক) 1 খ) 8
গ) 9 ঘ) 16
উত্তর : গ) 9

৮। $p^4 + p^2 + 1$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?
ক) $(p^2-p+1)(p^2+p-1)$
খ) $(p^2-p-1)(p^2+p+1)$
গ) $(p^2+p+1)(p^2+p+1)$
ঘ) $(p^2+p+1)(p^2-p+1)$
উত্তর : ঘ) $(p^2+p+1)(p^2-p+1)$

৯। $x^2 - 5x + 4$ এর উৎপাদক কত?
ক) $(x-1)(x-4)$ খ) $(x+1)(x-4)$
গ) $(x+2)(x-2)$ ঘ) $(x-5)(x-1)$
উত্তর : ক) $(x-1)(x-4)$

১০। $(x-7)(x-5)$ এর মান কত?
ক) $x^2+12x+35$ খ) $x^2+12x-35$
গ) $x^2-12x+35$ ঘ) $x^2-12x-35$
উত্তর : গ) $x^2-12x+35$

১১। $\frac{2.9\times2.9-1.1\times1.1}{2.9-1.1}$ এর মান কত?
ক) 1.8 খ) 1.9
গ) 2 ঘ) 4
উত্তর : ঘ) 4

১২। যদি $x = 2-\sqrt{3}$ হয়, তবে x^2 এর মান কত?
ক) 1 খ) $7-4\sqrt{3}$
গ) $2+\sqrt{3}$ ঘ) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$
উত্তর : খ) $7-4\sqrt{3}$

১৩। $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এবং $f(x) = 0$ হলে $x =$ কত?
ক) 2, 3 খ) $-5, 1$
গ) $-2, 3$ ঘ) $1, -5$
উত্তর : ক) 2, 3.

১৪।

	x	+6
x	x^2	$+6x$
-5	$-5x$	-30

ওপরের চিত্রের সর্বমোট ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
ক) $x^2-5x+30$ খ) x^2+x-30
গ) $x^2+6x-30$ ঘ) x^2-x+30
উত্তর : খ) x^2+x-30

১৫। ক যে কাজ x দিনে সম্পন্ন করতে পারে, খ সে কাজ 3x দিনে সম্পন্ন করতে পারে। একই সময়ে ক, খ এর কত গুণ কাজ করে?
ক) 2 গুণ খ) $2\frac{1}{2}$ গুণ
গ) 3 গুণ ঘ) 4 গুণ
উত্তর : গ) 3 গুণ

১৬। $a + b = -c$ হলে, $a^2 + 2ab + b^2$ এর মান c এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে?
ক) $-c^2$ খ) c^2
গ) bc ঘ) ca
উত্তর : খ) c^2

১৭। $x + y = 3, xy = 2$ হলে, $x^3 + y^3$ এর মান কত?
ক) 9 খ) 18
গ) 19 ঘ) 27
উত্তর : ক) 9

১৮। $8x^3 + 27y^3$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?
ক) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
খ) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
গ) $(2x-3y)(4x^2-9y^2)$
ঘ) $(2x+3y)(4x^2+9y^2)$
উত্তর : খ) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

১৯। $9x^2 + 16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে?
ক) 6xy খ) 12xy
গ) 24xy ঘ) 144xy
উত্তর : গ) 24xy

২০। $x - y = 4$ হলে, নিচের কোন উক্তিটি সঠিক?
ক) $x^3 - y^3 - 4xy = 65$ খ) $x^3 - y^3 - 12xy = 12$
গ) $x^3 - y^3 - 3xy = 64$ ঘ) $x^3 - y^3 - 12xy = 64$
উত্তর : ঘ) $x^3 - y^3 - 12xy = 64$

২১। $x^4 - x^2 + 1 = 0$ হয় তবে

১. $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ কত?
ক) 4 খ) 2
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর : গ) 1

২. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত?
ক) 4 খ) 3
গ) 2 ঘ) 1
উত্তর : খ) 3

৩. $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ কত?
ক) 3 খ) 2
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর : ঘ) 0

২২। ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ 2p দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

সমাধান : ধরি, কাজটি সর্বমোট x দিনে শেষ হয়।

$\therefore$ ক ও খ একত্রে কাজ করে $(x - r)$ দিন এবং খ একা করে r দিন।

ক এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{p}$ অংশ কাজ

খ এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{2p}$ অংশ কাজ

ক ও খ একত্রে একদিনে করে কাজটির $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right)$ অংশ

$= \frac{3}{2p}$ অংশ

$\therefore$ ক ও খ একত্রে $(x - r)$ দিনে করে কাজটির $\frac{3(x-r)}{2p}$ অংশ

খ একা r দিনে করে কাজটির $\frac{r}{2p}$ অংশ

প্রশ্নমতে, [(ক + খ) এর $(x - r)$ দিনের কাজ]
+ [খ এর r দিনের কাজ] = [সম্পূর্ণ কাজ]

$\therefore \frac{3(x-r)}{2p} + \frac{r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3(x-r)+r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3x - 3r + r}{2p} = 1$

বা, $3x - 2r = 2p$ [আড় গুণন করে]

বা, $3x = 2p + 2r$

$\therefore x = \frac{2(p+r)}{3}$

$\therefore \frac{2(r+p)}{3}$ দিনে কাজটি শেষ হয়েছিল। **(Ans.)**

২৩। দৈনিক 8 ঘন্টা পরিশ্রম করে 50 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘন্টা পরিশ্রম করে 60 জনে 16 দিনে ঐ কাজ করতে পারবে?

সমাধান : 50 জন লোকে একটি কাজ 12 দিনে শেষ করে দৈনিক 8 ঘন্টা পরিশ্রম করে

$\therefore$ 1 " " " " 12 " " " " $= 8 \times 50$ " " "

$\therefore$ 1 " " " " 1 " " " " $= 8 \times 50 \times 12$ " " "

$\therefore$ 60 " " " " 16 " " " " $= \frac{8 \times 50 \times 12}{60 \times 16}$ " " "

$= 5$ ঘন্টা পরিশ্রম করে

২৪। মিতা একটি কাজ x দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ y দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

সমাধান: মনে করি, সম্পূর্ণ কাজের পরিমাণ = 1

এখন, মিতা x দিনে করে 1টি কাজ

∴ " 1 " " $\frac{1}{x}$ অংশ কাজ

আবার, রিতা y দিনে করে 1টি কাজ

∴ " 1 " " $\frac{1}{y}$ অংশ "

(মিতা + রিতা) একত্রে 1 দিনে করে = $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ অংশ কাজ

$= \frac{x+y}{xy}$ " "

(মিতা + রিতা) একত্রে $\frac{x+y}{xy}$ অংশ কাজ করে 1 দিনে

∴ " " 1 বা সম্পূর্ণ " " " $= \frac{xy}{x+y}$ "

$= \frac{xy}{x+y}$ দিনে

অতএব, তারা $\frac{xy}{x+y}$ দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

২৫। বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কত জন যাত্রী গিয়েছিল।

সমাধান: মনে করি, বনভোজনে যাওয়ার জন্য আগ্রহী যাত্রী সংখ্যা = x

∴ মাথাপিছু ভাড়া হত = $\frac{5700}{x}$ টাকা

5 জন না আসায় যাত্রী সংখ্যা হল = x – 5

∴ মাথা পিছু ভাড়া হল = $\frac{5700}{x-5}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{5700}{x-5} = \frac{5700}{x} + 3$

বা, $\frac{5700}{x-5} - \frac{5700}{x} = 3$

বা, $5700\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x}\right) = 3$

বা, $5700\left(\frac{x-x+5}{x(x-5)}\right) = 3$

বা, $5700\left(\frac{5}{x(x-5)}\right) = 3$

বা, $\frac{5\times 5700}{x(x-5)} = 3$

বা, $\frac{5\times 5700}{x^2-5x} = 3$

বা, $\frac{1900\times 5}{x^2-5x} = 1$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x = 9500$

বা, $x^2 - 5x - 9500 = 0$

বা, $x^2 - 5x - 9500 = 0$

বা, $x^2 - 100x + 95x - 9500 = 0$

বা, $x(x-100) + 95(x-100) = 0$

বা, $(x-100)(x+95) = 0$

হয়, $x - 100 = 0$, $x = 100$, $\therefore x = 100$

অথবা, $x + 95 = 0$, $x = -95$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ যাত্রী সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না

অতএব, বাসে গিয়েছিল (100 – 5) = 95 জন যাত্রী।

২৬। একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় d কি. মি যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান: স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় যায় d কি. মি পথ

∴ " " 1 " $= \frac{d}{p}$ " "

আবার, স্রোতের অনুকূলে 2 ঘণ্টায় যায় d কি. মি পথ

∴ " " 1 " $= \frac{d}{q}$ " "

মনে করি, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় = y কি. মি

এবং স্থির পানিতে নৌকার বেগ " = x কি. মি

প্রশ্নমতে, $x + y = \frac{d}{q}$ ——— (i)

$x - y = \frac{d}{p}$ ——— (ii)

এখন, সমীকরণ (i ও ii) যোগ করে পাই, $2x = \frac{d}{q} + \frac{d}{p}$

বা, $2x = d\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)$

$\therefore x = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)$

আবার, সমীকরণ (i ও ii) বিয়োগ করে পাই,

$2y = \left(\frac{d}{q} - \frac{d}{p}\right)$

বা, $2y = d\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

$\therefore y = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

অতএব, নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)$ কি. মি.

এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ কি. মি.

২৭। একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
নৌকার বেগ ঘণ্টায় y কি.মি.
প্রশ্নানুসারে,

$\frac{15}{x+y}+\frac{15}{x-y}=4$

বা, $\frac{15(x-y)+15(x+y)}{(x+y)(x-y)}=4$

বা, $15x-15y+15x+15y=4(x+y)(x-y)$

বা, $30x=4(x^2-y^2)$

বা, $15x=2(x^2-y^2)$ .... (i)

আবার, $\frac{5}{x+y}=\frac{3}{x-y}$

বা, $5x-5y=3x+3y$

বা, $5x-3x=3y+5y$

বা, $2x=8y$

বা, $x=4y$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$15\times 4y=2\{(5y)^2-y^2\}$

বা, $60y=2(16y^2-y^2)$

বা, $60y=2\times 15y^2$

বা, $60y=30y^2$

বা, $2=y$

$\therefore y=2$

এখন, y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$x=4\times 2$
$=8$

$\therefore$ নির্ণেয় দাঁড়ের বেগ 8 কি.মি. (ঘণ্টা)
এবং স্রোতের বেগ 2 কি.মি. (ঘণ্টা)।

২৮। একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে $t_1 > t_2$)

সমাধান : ১ম নল দ্বারা, t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় 1 (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

$\therefore 1$ " " " $\frac{1}{t_1}$ " "

আবার, ২য় নল দ্বারা, t_2 মিনিটে খালি হয় 1 (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

$\therefore 1$ " " " $\frac{1}{t_2}$ " "

দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে ১ মিনিটে পূর্ণ হয়

$=\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$

$=\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$ ট্যাঙ্ক

দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$ ট্যাঙ্ক পূর্ণ হয় = 1 মিনিটে

$\therefore$ " " " " " 1 বা সম্পূর্ণ " = $\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ "

$\therefore$ নির্ণেয় ট্যাঙ্কটি $\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ মিনিটে পূর্ণ হবে।

২৯। একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দ্বারা 1 মিনিটে তা থেকে 15 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

সমাধান: মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

$\therefore y = 12x$

বা, $x = \frac{y}{12}$ ——— (i)

আবার, দুইটি নল দ্বারা 48 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

$\therefore y = 48x - 48 \times 15$ ——— (ii)

x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$y = 48 \times \frac{y}{12} - 720$

বা, $y = 4y - 720$

বা, $4y - y = 720$

বা, $3y = 720$

বা, $y = \frac{720}{3}$ 240

$\therefore y = 240$

$\therefore$ চৌবাচ্চাটিতে মোট 240 লিটার পানি ধরে।

৩০। একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: 10% লাভে ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য

= (100 + 10) টাকা

= 110 টাকা

বিক্রয়মূল্য 110 টাকা হলে ক্রয়মূল্য = 100 টাকা

$\therefore$ " " 1 " " " $= \frac{100}{110}$ "

$\therefore$ " " 11 " " " $= \frac{100 \times 11}{110}$ টাকা

= 10 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় কলমটির ক্রয়মূল্য 10 টাকা।

৩১। একটি খাতা 36 টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হলো, 72 টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: মনে করি, খাতাটির ক্রয়মূল্য = x টাকা

এখন, 36 টাকায় বিক্রয় করলে ক্ষতি হয় = (x − 36) টাকা

72 " " " লাভ হয় = (72 − x) "

শর্তমতে, $(x - 36) \times 2 = 72 - x$

বা, $2x - 72 = 72 - x$

বা, $2x + x = 72 + 72$

বা, $3x = 144$

বা, $x = \frac{144}{3}$

$\therefore x = 48$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় খাতাটির ক্রয়মূল্য 48 টাকা।

৩২। ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

সমাধান: মনে করি, ক এর অংশ × 2 = খ এর অংশ × 3 = গ এর অংশ × 4 = x টাকা

$\therefore$ 'ক' এর অংশ $= \frac{x}{2}$ টাকা;

'খ' এর অংশ $= \frac{x}{3}$ টাকা;

'গ' এর অংশ $= \frac{x}{4}$ টাকা;

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 260$

বা, $\frac{6x + 4x + 3x}{12} = 260$

বা, $\frac{13x}{12} = 260$

বা, $13x = 260 \times 12$

বা, $x = \frac{260 \times 12}{13}$ (20)

$\therefore x = 240$

$\therefore$ 'ক' এর অংশ $= \frac{240}{2}$ টাকা = 120 টাকা

'খ' এর অংশ $= \frac{240}{3}$ টাকা = 80 টাকা

'গ' এর অংশ $= \frac{240}{4}$ টাকা = 60 টাকা

উত্তর : 120 টাকা, 80 টাকা, 60 টাকা।

৩৩। একটি দ্রব্য x% ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, 3x% লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে 18x টাকা বেশি পাওয়া যায়, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

সমাধান: মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য = 100 টাকা

তাহলে, x% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (100 − x) টাকা

আবার, 3x% লাভে বিক্রয়মূল্য = (100 + 3x) "

$\therefore$ পূর্বাপেক্ষা বিক্রয়মূল্য বেশি

= {(100 + 3x) − (100 − x)} টাকা

= (100 + 3x − 100 + x)

= 4x টাকা

এখন, বিক্রয়মূল্য 4x টাকা হলে ক্রয়মূল্য = 100 টাকা

" 1 " " " $= \frac{100}{4x}$ টাকা

" 18x " " " $= \frac{100 \times 18x}{4x}$ (25)

= 450 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 450 টাকা।

৩৪। 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা হলে শতকরা মুনাফার হার কত?

সমাধান : একই হার মুনাফায়, 300 টাকার 4 বছরের মুনাফা = 100 টাকার (3×4) বছর বা 12 বছরের মুনাফা

আবার, 4000 টাকার 5 " " = 100 টাকার (4×5) " বা 20 বছরের মুনাফা

যেহেতু উভয় টাকার মুনাফা একত্রে 148 দেয়া আছে

$\therefore$ 100 টাকার $(12 + 20)$ বছরের বা 32 বছরের মুনাফা 148 টাকা

অতএব, 100 টাকার 32 বছরের মুনাফা 148 টাকা

$\therefore$ 100 " 1 " " $= \frac{148}{32}$ "

$= 4.625$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার 4.625%

৩৫। 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত?

সমাধান : মনে করি, মূলধন = 100 টাকা

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে আমরা জানি, $I = Pnr$

এখানে, বিনিয়োগ কাল, $n = 2$ বছর

মূলধন = 100 টাকা

মুনাফার হার, $r = 4\% = \frac{4}{100}$

$\therefore I = \cancel{100} \times 2 \times \frac{4}{\cancel{100}} = 8$ টাকা

চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে C সবৃদ্ধি মূলধন হলে,

$$C = P(1+r)^n$$
$$= 100\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$$
$$= 100\left(\frac{100+4}{100}\right)^2$$
$$= 100\left(\frac{104}{100}\right)^2$$
$$= 100 \times (1.04)^2$$
$$= 100 \times 1.04 \times 1.04$$
$= 108.16$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = সবৃদ্ধি মূলধন – মূলধন

$= (108.16 - 100.00)$ টাকা

$= 8.16$ টাকা

$\therefore$ মুনাফার পার্থক্য $= (8.16 - 8.00)$ টাকা

$= 0.16$ টাকা

এখন, মুনাফার পার্থক্য 0.16 টাকা হলে মূলধন = 100 টাকা

" " 1 " " " $= \frac{100 \times 100}{16}$ "

$= 625$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় মূলধন = 625 টাকা।

৩৬। কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

সমাধান : এখানে, 5 বছরে মুনাফাসহ আসল = 600 টাকা

এবং 3 " " " = 460 "

(–) করে 2 বছরে মুনাফা = 140 টাকা

$\therefore$ 2 বছরে মুনাফা = 140 টাকা

$\therefore$ 1 " " $= \frac{140}{2}$ "

$\therefore$ 3 " " $= \frac{\overset{70}{\cancel{140}} \times 3}{\cancel{2}}$

$= 210$ টাকা

3 বছরের মুনাফাসহ আসল = 460 টাকা

3 " মুনাফা = 210 "

(–) করে আসল = 250 টাকা

$\therefore$ 250 টাকায় 3 বছরের মুনাফা = 210 টাকা

$\therefore$ 250 " 1 " " $= \frac{210}{3}$ "

$\therefore$ 1 " 1 " " $= \frac{210}{3 \times 250}$ "

$\therefore$ 100 " 1 " " $= \frac{\overset{7}{\cancel{210}} \times 100}{\cancel{3} \times \cancel{250}}$

$= \frac{700}{25}$

$= 28$ টাকা

$\therefore$ সুতরাং শতকরা মুনাফার হার 28 টাকা বা 28% (Ans.)

৩৭। শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 985 টাকা হবে?

সমাধান : আমরা জানি, $S = P(1 + nr)$

এখানে, S = সরল মুনাফার সবৃদ্ধিমূল = 985

n = মোট সময় = 13 বছর

r = শতকরা মুনাফার হার = 5 টাকা

$\therefore r = \frac{s}{100} = \frac{5}{100}$

P = মূলধন = ?

প্রশ্নমতে, $985 = P\left(1 + 13 \times \frac{5}{100}\right)$

বা, $985 = P\left(\frac{100+65}{100}\right)$

বা, $985 = P\left(\frac{165}{100}\right)$

বা, $985 = P(1.65)$

বা, $p = \frac{985}{1.65}$

$= 596.969$

$= 596.97$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন = 596.97 টাকা (প্রায়)

৩৮। শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার মুনাফায় কত টাকা 12 বছরে সবৃদ্ধিমূল 1248 টাকা হবে?

সমাধান: আমরা জানি, $S = p(1 + nr)$

এখানে, S = সরল মুনাফায় সবৃদ্ধিমূল = 1248 টাকা

n = মোট সময় = 12 বছর

s = শতকরা মুনাফার হার = 5 টাকা

$\therefore r = \frac{S}{100} = \frac{5}{100}$

P = মূলধন = ?

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $1248 = P\left(1 + 12 \times \frac{5}{100}\right)$

বা, $1248 = P\left(\frac{100 + 60}{100}\right)$

বা, $1248 = P\left(\frac{160}{100}\right)$

বা, $1248 = P(1.60)$

বা, $P = \frac{1248}{1.60}$

= 780 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন = 780 টাকা।

৩৯। 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল, $C = P(1 + r)^n$

এখানে, বিনিয়োগ কাল, n = 3 বছর

মূলধন, P = 8000 বছর

মুনাফার হার, $r = 5\% = \frac{5}{100}$

$\therefore C = 8000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$

$= 8000\left(\frac{105}{100}\right)^3$

$= 8000(1.05)^3$

= 9261

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল = 9261 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = (9261 – 8000) টাকা

= 1261 টাকা।

আবার,

আমরা জানি, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে সুদ, I = Pnr

এখানে, P = মূলধন = 8000 টাকা

n = সময় = 3 বছর

r = মুনাফার হার = 5%

$= \frac{5}{100}$

$\therefore I = 8000 \times 3 \times \frac{5}{100}$

= 1200 টাকা

$\therefore$ সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য

= (1261 – 1200)

= 61 টাকা (Ans.)

৪০। মিটির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) x%। একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাঁকে কত ভ্যাট দিতে হবে? x = 15, P = 2300 হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

সমাধান: এখানে, 100 টাকার ভ্যাট = x টাকা

$\therefore$ ভ্যাটসহ বিক্রয়মূল্য = (100 + x) টাকা

এখন, বিক্রয়মূল্য (100 + x) টাকা হলে ভ্যাট দিতে হয় x টাকা

$\therefore$ " 1 " " " " " $= \frac{x}{10 + x}$ "

$\therefore$ " P " " " " " $= \frac{P \times x}{100 + x}$ "

$= \frac{Px}{100 + x}$ "

$\therefore$ নির্ণেয় ভ্যাটের পরিমাণ $= \frac{Px}{100 + x}$ টাকা

আবার, x = 15, P = 2300 হলে,

ভ্যাটের পরিমাণ $= \frac{Px}{100 + x}$

$= \frac{2300 \times 15}{100 + 15}$

$= \frac{34500}{115}$

= 300 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় ভ্যাটের পরিমাণ = 300 টাকা।

৪১। কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 3.

ক. সংখ্যাটি x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$

সমাধান: ক. মনে করি, সংখ্যাটি x

সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত রাশি $\frac{1}{x}$

$\therefore$ শর্তমতে, $x + \frac{1}{x} = 3$

খ. $x + \frac{1}{x} = 3$

আমরা জানি, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4.x.\frac{1}{x}$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2 - 4$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 - 4$

$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

প্রদত্ত রাশি $= x^3 - \frac{1}{x^3}$

$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3.x.\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= (\sqrt{5})^3 + 3.\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $8\sqrt{5}$

গ. L.H.S $= x + \frac{1}{x} = 3$

এবং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ ['ক' এবং 'খ' হতে]

$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x}$

$= (\sqrt{5})^2 + 2 = 5 + 2 = 7$

$\therefore (x^3 + \frac{1}{x^3}) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= 3^3 - 3 \times 3 = 27 - 9 = 18$

$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) = 7 \times 18$

বা, $x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = 126$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ $126 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 126 - 3$

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$ (প্রমাণিত)

৪২। কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 100 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. মোট চাঁদার $\frac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্যে সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x

$\therefore$ প্রত্যেক চাঁদা দেয় 100x টাকা

$\therefore A = x.100x$ টাকা $= 100x^2$ টাকা

খ. 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় চাঁদা প্রদানকারী সদস্যের সংখ্যা $(x - 4)$

প্রত্যেকে চাঁদা প্রদান করেন $(100x + 500)$ টাকা।

সুতরাং মোট চাঁদার পরিমাণ $= (x - 4)(100x + 500)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে,

$100x^2 = (x - 4)(100x + 500)$

বা, $100x^2 = 100x^2 - 400x + 500x - 2000$

বা, $100x = 2000$

$\therefore x = 20$

অর্থাৎ সমিতির সদস্য সংখ্যা 20 জন

এবং মোট চাঁদার পরিমাণ $= 100 \times (20)^2$ টাকা

$= 40,000$ টাকা

সুতরাং সদস্য সংখ্যা 20 জন এবং চাঁদার পরিমাণ 40,000 টাকা। (Ans.)

গ. 'খ' হতে পাই, সদস্যের মোট চাঁদার পরিমাণ 40,000 টাকা।

40,000 টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ $= 40,000 \times \frac{1}{4}$ টাকা

$= 10,000$ টাকা

বাকি টাকা $= (40,000 - 10,000)$ টাকা

$= 30,000$ টাকা

এখানে, $P_1 = 10,000$ টাকা $\quad P_2 = 30,000$ টাকা

$n_1 = 2$ বছর $\quad n_2 = 2$ বছর

$r_1 = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$

$r_2 = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$

মোট মুনাফা $= P_1n_1r_1 + P_2n_2r_2$

$= 10,000 \times 2 \times 0.05 + 30,000 \times 2 \times 0.04$ টাকা

$= 1,000 + 2,40 = 3,400$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মোট মুনাফা 3,400 টাকা।

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $5 - 4x - x^2$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?
[ভিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]

ক $(x + 2)(x + 3)$ খ $(5 + x)(1 - x)$
গ $(5 - x)(1 - x)$ ঘ $(1 - x)(x + 4)$ — (খ)

২. $\frac{1}{2}\{(x + y)^2 + (x - y)^2\}$ এর মান নিচের কোনটি?
[ভিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]

ক $2(x^2 + y^2)$ খ $2xy$
গ $x^2 + y^2$ ঘ $4xy$ — (গ)

৩. $a^3 - a^2 - 10^3 - 8$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?
[ডা. খা...গীর সর... বিদ্যা...]

ক $(a + 1)(a - 4)(a + 2)$
খ $(a - 1)(a + 4)(a + 2)$
গ $(a + 1)(a + 4)(a - 2)$
ঘ $(a - 1)(a - 4)(a + 2)$

৪. $9x^2 + 25y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে? [ডা. খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক 30xy খ 15xy
গ 24xy ঘ 12xy — (ক)

৫. xy এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
[ডা. খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক $\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$
খ $(x + y)^2 + (x - y)^2$
গ ...
ঘ $\left(\frac{...}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$

অধ্যায় ৪

সূচক ও লগারিদম

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ধনাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও [illegible] করতে পারবে।
- n তম মূল ও মূলদ ভগ্নাংশ [illegible] সমস্যার সমাধান [illegible]
- লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পার[illegible]
- লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয় করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

সূচক : n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণফল যদি a^n হয় তাহলে n কে a এর সূচক এবং a কে n এর ভিত্তি বলে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি :

- $a^n = a \times a \times a \times$ ....(n সংখ্যক a)
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ $[a \neq 0, 1]$
- $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ $[x \neq 0]$

❖ **লগারিদম :** যদি কোন সংখ্যাকে অন্য একটি সংখ্যার ভিত্তিতে সূচক বা শক্তিতে উন্নীত করা হয়, তবে সূচকটিকে দ্বিতীয় সংখ্যার ভিত্তিতে প্রথম সংখ্যার লগারিদম সংক্ষেপে লগ বলে। যেমন :

100 কে 10 এর ভিত্তির শক্তিতে উন্নীত করলে দাড়ায়, $100 = 10^2$. এখানে 2 হল 10 এর ভিত্তিতে 100 এর লগ। একে গাণিতিকভাবে $\log_{10}100 = 2$ লেখা হয়।

x অঋণাত্মক বা ঋণাত্মক, যাই হোক না কেন, a^x সর্বদাই ধনাত্মক সংখ্যা। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম আছে। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নেই।

$a^x = n$ হলে, $x = \log_a n$ যখন, $a > 0$, $a \neq 1$, n ধনাত্মক সংখ্যা।

লগারিদমের সূত্র :

- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a x = N$ হলে, $x = a^N$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a a = 1$

[বিঃ দ্রঃ অনেক ক্ষেত্রে log এর ভিত্তি উল্লেখ থাকে না। এ ক্ষেত্রে log এর ভিত্তিকে 10 ধরা হয়ে থাকে। এরূপ লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলে। যেমন : logx বা logy]

❖ **সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ :** যদি a এর মান 1 এর চেয়ে বড় কিন্তু 10 এর চেয়ে ছোট হয় তবে, অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ এর আকারে প্রকাশ করলে একে বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ বলে। যেমন : 100000 এর আদর্শরূপ 10^5 এবং .00001 এর আদর্শরূপ 10^{-5} (n-এর মান যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)।

❖ **লগের পূর্ণক ও অংশক :** কোন ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম একটি দশমিক যুক্ত সংখ্যা। উক্ত লগারিদমের দশমিক যুক্ত অংশকে অংশক এবং পূর্ণ অংশকে পূর্ণক বলা হয়। যেমন– কোন সংখ্যার লগ 3.2456 হলে এর পূর্ণক 3 এবং অংশক 0.2456। লগারিদমের পূর্ণক ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে।

পূর্ণক নির্ণয় পদ্ধতি :

1) একের চেয়ে বড় সংখ্যার পূর্ণক নির্ণয়ের জন্য দশমিকের বামের অংক সংখ্যা গণনা করতে হবে। পূর্ণক উক্ত অংক সংখ্যার চেয়ে 1 কম। যেমন : 646.28 এর লগের পূর্ণক = 3 − 1 = 2
2) একের চেয়ে ছোট সংখ্যার দশমিকের বামে শূন্য থাকে। এ ক্ষেত্রে দশমিকের ঠিক পরে যতগুলো শূন্য থাকে তা থেকে পূর্ণক দশমিকের ডানে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি।

যেমন : 0·000301 এর দশমিকের ডানে পর পর তিনটি শূন্য রয়েছে (3 এর পরের শূন্য ধর্তব্য নয়)।
কাজেই পূর্ণক = – (3 + 1) = – 4
– 4 কে $\bar{4}$ আকারেও লেখা হয়।

অংশক নির্ণয় পদ্ধতি :
অংশক নির্ণয়ে আমাদের লগ সারণীর সাহায্য নিতে হয়। লগারিদমের সারণী ব্যবহারের পূর্বে আমাদের এর সাথে পরিচিত হওয়া দরকার। এ সারণীর সর্ব বামের কলামে 10, 11, 12, ...99 পর্যন্ত সংখ্যা আছে। আবার এ কলামটির ডানে রয়েছে 10 টি কলামের (0 থেকে 9 পর্যন্ত) মূল লগ সারণী। এর পরে আরো 9 টি কলাম (1 থেকে 9 পর্যন্ত) রয়েছে যার নাম অন্তর সারণী।

উদাহরণ : log 995·6 এর অংশক কত?
i) এখানে সংখ্যাটিকে অর্থাৎ 995·6 কে দশমিক বিহীন ধরতে হবে অর্থাৎ তা 9956 হবে।
ii) 9956 কে তিনটি অংশে ভাগ করে নিতে হবে। যথা : 99, 5 এবং 6.
iii) এখন লগ সারণীর সর্ব বামের কলামের 99 নং সারির 5 শীর্ষক কলামের মান দেখতে হবে। আমরা এই মান 99739 পাই; এরপর একই সারির (99 নং সারি) অন্তর কলামের 6 শীর্ষক কলামের মান নিতে হবে যা আমরা 26 পাই।
iv) এখন 99739 + 26 = 99765। তাই, log 995·6 এর অংশক হবে 0.99765.

অনুশীলনী- ৪.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–১ : খালিঘর পূরণ কর : পৃষ্ঠা- ৭৪

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\square}$ (ii) $5^{\square} \times 5^3 = 5^5$

(iii) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^{\square}} = 1$

(v) $(-5)^0 = \square$

সমাধান :

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\boxed{4}}$ (ii) $5^{\boxed{2}} \times 5^3 = 5^5$

(iii) $a^2 \times a^{\boxed{-5}} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^{\boxed{1}}} = 1$

(v) $(-5)^0 = \boxed{1}$

কাজ–২ : সরল কর : পৃষ্ঠা- ৭৫

(i) $\frac{2^4.2^2}{32}$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iii) $8^{\frac{3}{4}} + 8^{\frac{1}{2}}$

সমাধান :

(i) $\frac{2^4.2^2}{32} = \frac{2^4.2^2}{2^5} = \frac{2^{4+2}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$ (Ans.)

(ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ (Ans.)

(iii) $8^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{2}} = \frac{8^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{2}}} = 8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3-2}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ৩। দেখাও যে, $(a^p)^{q-r} . (a^q)^{r-p} . (a^r)^{p-q} = 1$

সমাধান : L. H. S $= (a^p)^{q-r} . (a^q)^{r-p} . (a^r)^{p-q}$
$= a^{p(q-r)} . a^{q(r-p)} . a^{r(p-q)}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$
$= a^{pq-pr} . a^{qr-pq} . a^{pr-qr}$
$= a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$
$= a^0 = 1 =$ R. H. S
∴ L. H. S = R. H. S (Showed)

উদাহরণ– ৫। সরল কর :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$ (খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

সমাধান :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$

$= \frac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}} \times (54)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \times (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{2^1 . 3^{\frac{1}{2}}} \times 3.2^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1} \times \frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ (Ans.)

(খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= (-3)(-3)(-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -27 \times \frac{1}{4} = -\frac{27}{4}$ (Ans.)

লক্ষণীয়
1. a > 0, a ≠ 1 শর্তে $a^x = a^y$ হলে, x = y
2. a > 0, b > 0, x ≠ 0 শর্তে $a^x = b^x$ হলে, a = b

উদাহরণ- ৬। সমাধান কর : $4^{x+1} = 32$

সমাধান : $4^{x+1} = 32$

বা, $(2^2)^{x+1} = 32$

বা, $2^{2x+2} = 2^5$

বা, $2x + 2 = 5$, [$a^x = a^y$ হলে, $x = y$]

বা, $2x = 5 - 2$

বা, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৪.১

সরল কর (১ – ১০)

১। $\frac{3^3.3^5}{3^6}$

সমাধান : $\frac{3^3.3^5}{3^6} = \frac{3^{3+5}}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2 = 9$ (Ans)

২। $\frac{5^3.8}{2^4.125}$

সমাধান : $\frac{5^3.8}{2^4.125} = \frac{5^3.2^3}{2^4.5^3} = \frac{5^3}{5^3}.\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

৩। $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$

সমাধান : $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}} = \frac{7^{3-3}}{3^{1-4}} = \frac{3^0}{3^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{27}} = 27$ (Ans.)

৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

সমাধান : $\frac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}.7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{7^{\frac{2+1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{7^{\frac{3}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{1-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ (Ans.)

৫। $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

সমাধান : $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃতমান $\frac{10}{7}$

৬। $(2a^{-1} + 3b-1)^{-1}$

সমাধান : $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1} = \left(2.\frac{1}{a} + 3.\frac{1}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{2b+3a}{ab}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2b+3a}{ab}} = \frac{ab}{2b+3a} = \frac{ab}{3b+2b}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{ab}{3b+2b}$

৭। $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$

সমাধান : $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2 = \left(\frac{a^2.\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}.b}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{b}{a^2}}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{b} \times \frac{a^2}{b}\right)^2 = \left(\frac{a^4}{b^2}\right)^2 = \frac{a^8}{b^4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{a^8}{b^4}$

৮। $\sqrt{x^{-1}y}.\sqrt{y^{-1}z}.\sqrt{z^{-1}x}$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$

সমাধান : $= \sqrt{x^{-1}y}.\sqrt{y^{-1}z}.\sqrt{z^{-1}x} = \sqrt{\frac{y}{x}}.\sqrt{\frac{z}{y}}.\sqrt{\frac{x}{z}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= x^0 \times x^0 \times x^0$$

$$= 1 \times 1 \times 1$$

$$= 1$$

অতএব নির্ণেয় সরলকৃত মান 1

৯। $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

সমাধান : $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$$= \frac{2^n.2^4 - 4.2^n.21}{2^n.2^2 \div 2^1}$$

$$= \frac{2^n(2^4 - 8)}{2^n.2^{2-1}}$$

$$= \frac{2^n(16 - 8)}{2^n.2^1}$$

$$= \frac{16 - 8}{2} = \frac{8}{2}$$

$$= 4$$

∴ নির্ণেয় সরলকৃত মান 4

১০। $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

সমাধান : $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{(m-1)(m+1)}}$$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$$

$$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$$

$$= 3^{-m^2+2m+1} \div 3^{-m^2+2m+3}$$

$$= 3^{-m^2+2m+1+m^2-2m-3}$$

$$= 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

অতএব, নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{1}{9}$

প্রমাণ কর : (১১ – ১৮)

১১। $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

সমাধান : $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

L.H.S $= \frac{4^n - 1}{2^n - 1}$

$$= \frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1}$$

$$= \frac{(2^{2n} - 1)(2^n + 1)}{(2^n - 1)(2^n + 1)}$$ [লব ও হরকে $(2^n + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{(2^{2n} - 1)(2^n + 1)}{(2^n)^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{(2^{2n} - 1)(2^n + 1)}{(2^{2n} - 1)}$$

$$= (2^n + 1)$$

= R.H.S.

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১২। $\frac{2^{p+1} . 3^{2p-1} . 5^{p+q} . 6^q}{6^p . 10^{q+2} . 15^p} = \frac{1}{50}$

সমাধান : L.H.S $= \frac{2^{p+1} . 3^{2p-1} . 5^{p+q} . 6^q}{6^p . 10^{q+2} . 15^p}$

$$= \frac{2^{p+1} . 3^{2p-1} . 5^{p+q} . (2\times3)^q}{(2\times3)^p . (2\times5)^{q+2} . (3\times5)^p}$$

$$= \frac{2^{p+1} . 3^{2p-1} . 5^{p+q} . 2^q . 3^q}{2^p . 3^p . 2^{q+2} . 5^{q+2} . 3^p . 5^p}$$

$$= \frac{2^{p+1+q} . 3^{2p-q+q} . 5^{p+q}}{2^{p+q+2} . 3^{p+p} . 5^{q+2+p}}$$

$$= 2^{p+1+q-p-q-2} . 3^{2p-p-p} . 3^{p+q-q-2-p}$$

$$= 2^{-1} . 3^0 . 5^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} . 1 . \frac{1}{5^2}$$

$$= \frac{1}{50} = \text{R.H.S}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৩। $\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n . \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l . \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m = 1$

সমাধান : L.H.S $= \left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n . \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l . \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m$

$$= \frac{a^{ln}}{a^{mn}} . \frac{a^{ml}}{a^{nl}} . \frac{a^{mn}}{a^{al}}$$

$$= \frac{l(an + ml + mn)}{a(mn + nl + ml)} = 1 = \text{R.H.S}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}} = 1$

সমাধান : L.H.S $= \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}}$

$$= \frac{a^{p+q+q+r+r+p}}{a^{2r+2p+2q}}$$

$$= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}}$$

$$= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}}$$

$$= 1 = \text{R.H.S}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৫। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

সমাধান : L.H.S $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$$= \frac{x^{\frac{a}{ab}}}{x^{\frac{a}{ab}}} . \frac{x^{\frac{b}{bc}}}{x^{\frac{c}{bc}}} . \frac{x^{\frac{c}{ca}}}{x^{\frac{a}{ca}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{1}{a}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{b}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{c}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৬। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

সমাধান :

$L.H.S = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a}$

$= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2}$

$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$

$= x^0$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৭। $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

সমাধান :

$L.H.S = \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$= (x^{p-q})^{p+q-r} \times (x^{q-r})^{q+r-p} \times (x^{r-p})^{r+p-q}$

$= x^{p^2-q^2-rp+qr} \times x^{q^2-r^2-pq+rp} \times x^{r^2-p^2-qr+pr}$

$= x^{p^2-q^2-rp+qr+q^2-r^2+rq+rp+r^2-p^2+pq}$

$= x^0$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৮। যদি $a^x = b$, $b^y = c$, এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b$

$b^y = c$

$c^z = a$

রাশি তিনটি যোগ করে পাই,

$a^x + b^y + c^z = b + c + a$

বা, $a^x + b^y + c^z = a^1 + b^1 + c^1$

এখানে, $ax = a^1$

$\therefore x = 1$

একইভাবে, $y = 1$

$z = 1$

$\therefore L.H.S = xyz$

$= 1.1.1$

$= 1 = R.H.S$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Showed)

সমাধান কর : (১৯ – ২২)

১৯। $4^x = 8$

সমাধান : $4^x = 8$

বা, $(2^2)^x = 2 \times 2 \times 2$

বা, $2^{2x} = 2^3$

বা, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{2}$

২০। $2^{2x+1} = 128$

সমাধান : $2^{2x+1} = 128$

বা, $2^{2x+1} = 2^7$

বা, $2x + 1 = 7$

বা, $2x = 7 - 1$

বা, $2x = 6$

বা, $x = \frac{6}{2}$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$

২১। $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

সমাধান : $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

বা, $\frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$

বা, $3(x+1) = 2(2x-1)$

বা, $3x + 3 = 4x - 2$

বা, $4x - 2 = 3x + 3$

বা, $4x - 3x = 3 + 2$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

২২। $2^x + 2^{1-x} = 3$

সমাধান : $2^x + 2^{1-x} = 3$

বা, $2^x + 2^1 \cdot \frac{1}{2^x} = 3$

বা, $2^x + \frac{1}{2^x} = 3$

বা, $\frac{2^{2x} + 2}{2^x} = 3$

বা, $2^{2x} + 2 = 3.2^x$

বা, $2^{2x} + 2 - 3.2^x = 0$

বা, $(2x)^2 - 2.2^x.1 + 1^2 - 2^x + 1 = 0$

বা, $(2^x - 1)^2 - 2^x + 1 = 0$

বা, $(2^x - 1)^2 - 1(2^x - 1) = 0$

বা, $(2^x - 1)(2^x - 1 - 1) = 0$

বা, $(2^x - 1)(2^x - 2) = 0$

$\therefore 2^x - 1 = 0$ অথবা, $2^x - 2 = 0$

বা, $2^x = 1$ বা, $2^x = 2$

বা, $2^x = 2^0$ বা, $2^x = 2^1$

বা, $x = 0$ $\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, 1$

❑ অনুশীলনী- ৪.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ–১ : লগের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

সমাধান :

(i) $10^2 = 100$	$\log_{10}100 = 2$
(ii) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$
(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
(iv) $\sqrt[4]{2} = 4$	$\log_2 4 = \frac{4}{4}$

❑ কাজ–২ : ফাঁকা জায়গা পূরণ কর :

সমাধান :

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$e^0 = 1$ $a^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$ $\log_a 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$e^1 = e$	$\log_e e = 1$
	$\log_a a = 1$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ৭॥ মান নির্ণয় কর : ক) $\log_{10}100$ খ) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ গ) $\log_{\sqrt{3}}81$

সমাধান :

ক) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10$ $[\because \log_{10}M^r = r\log_{10}M]$

$= 2 \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= 2$ (Ans.)

খ) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3$ $[\log_a M^r = r\log_a M]$

$= -2 \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= -2$ (Ans.)

গ) $\log_{\sqrt{3}}81 = \log_{\sqrt{3}}3^4 = \log_{\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})\}^4 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8$

$= 8\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= 8 \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= 8$ (Ans.)

উদাহরণ– ৮॥ ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ কত?

খ) 400 এর লগ 4; ভিত্তি কত?

সমাধান :

ক) ∴ $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ

$= \log_5 5\sqrt{5} = \log_5(5 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\log_5 5$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \frac{3}{2} \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= \frac{3}{2}$ (Ans.)

খ) ধরি, ভিত্তি a

∴ প্রশ্নমতে, $\log_a 400 = 4$

বা, $a^4 = (20)^2$

বা, $a^4 = (4 \times 5)^2$

বা, $a^4 = (2\sqrt{5})^4$

∴ $a = 2\sqrt{5}$ $[\because a^x = b^x$ হলে, $a = b]$

∴ ভিত্তি $2\sqrt{5}$ (Ans.)

উদাহরণ– ৯॥ x এর মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_{10}x = -2$

খ) $\log_x 324 = 4$

সমাধান :

ক) $\log_{10}x = -2$

∴ $x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

বা, $x = \frac{1}{100} = 0.01$

∴ $x = 0.01$ (Ans.)

খ) $\log_x 324 = 4$

∴ $x^4 = 324 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

$= 3^4 \times 2^2 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$

বা, $x^4 = (3\sqrt{2})^4$

∴ $x = 3\sqrt{2}$ (Ans.)

উদাহরণ– ১০॥ প্রমাণ কর যে, $3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}40$

সমাধান :

বামপক্ষ $= 3\log_{10}2 + \log_{10}5$

$= \log_{10}2^3 + \log_{10}5$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \log_{10}8 + \log_{10}5$

$= \log_{10}(8 \times 5)$ $[\because \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N]$

$= \log_{10}40$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ১১॥ সরল কর : $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

সমাধান : $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

$= \frac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}} + \log_{10}2^3 - \log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}$

$$= \frac{\log_{10}3^{\frac{3}{2}} + \log_{10}2^3 - \log_{10}10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}12 - \log_{10}10}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log_{10}3 + 3\log_{10}2 - \frac{3}{2}\log_{10}10}{\log_{10}(3 \times 2^2) - \log_{10}10}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(\log_{10}3 + 2\log_{10}2 - 1)}{(\log_{10}3 + 2\log_{10}2 - 1)} \quad [\because \log_{10}10 = 1]$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (Ans.)}$$

∴ নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{3}{2}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৪.২

১। মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_3 81$

সমাধান : $\log_3 81$

$= \log_3 3^4$

$= 4 \log_3 3 \quad [\because \log 3 = 1]$

$= 4 . 1$

$= 4$

∴ নির্ণেয় মান 4

খ) $\log_5 \sqrt[3]{5}$

সমাধান : $\log_5 \sqrt[3]{5}$

$= \log_5 5^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \log_5 5$

$= \frac{1}{3} . 1 \quad [\because \log 5^5 = 1]$

$= \frac{1}{3}$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{1}{3}$

গ) $\log_4 2$

সমাধান : $\log_4 2$

$= \log_4 \sqrt{4}$

$= \log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_4 4 \quad [\because \log 4^4 = 1]$

$= \frac{1}{2} \cdot 1$

$= \frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$

ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$

সমাধান : $\log_{2\sqrt{5}} 400$

$= \log_{2\sqrt{5}} 16 \times 25$

$= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \cdot 5^2$

$= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \cdot (\sqrt{5})^4$

$= \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4$

$= 4 \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5} \quad [\because \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5} = 1]$

$= 4.1 = 4$

∴ নির্ণেয় মান 4

ঙ) $\log_5 \left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)$

সমাধান : $\log_5 \left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)$

$= \log_5 \left(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)$

$= \log_5 \left(5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}\right)$

$= \log_5 5^{\frac{5}{6}}$

$= \frac{5}{6} \log_5 5$

$= \frac{5}{6} . 1 = \frac{5}{6} \quad [\because \log 5^5 = 1]$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{5}{6}$

২। x এর মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_5 x = 3$

সমাধান : $\log_5 x = 3$

বা, $x = 5^3$

∴ $x = 125$ (Ans.)

খ) $\log_x 25 = 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_x 25 = 2$

বা, $25 = x^2$

বা, $5^2 = x^2$

∴ $x = 5$ (Ans.)

গ) $\log_x \frac{1}{16} = -2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_x \frac{1}{16} = -2$

বা, $\frac{1}{16} = x^{-2}$

বা, $\frac{1}{4^2} = x^{-2}$

বা, $4^{-2} = x^{-2}$

$\therefore x = 4$ (Ans.)

৩। দেখাও যে,

ক) $5\log_{10}5 - \log_{10}25 = \log_{10}125$

সমাধান : L.H.S $= 5\log_{10}5 - \log_{10}25$

$= 5\log_{10}5 - \log_{10}5^2$

$= 5\log_{10}5 - 2\log_{10}5$

$= 3\log_{10}5$

$= \log_{10}5^3$

$= \log_{10}125 =$ R.H.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S (Showed)

খ) $\log_{10}\frac{50}{147} = \log_{10}2 + 2\log_{10}5 - \log_{10}3 - 2\log_{10}7$

সমাধান :

L.H.S $= \log_{10}\frac{50}{147}$

$= \log_{10}50 - \log_{10}147$

$= \log_{10}(2\times5\times5) - \log_{10}(3\times7\times7)$

$= \log_{10}(2\times5^2) - \log_{10}(3\times7^2)$

$= (\log_{10}2 + \log_{10}5^2) - (\log_{10}3 + \log_{10}7^2)$

$= \log_{10}2 + 2\log_{10}5 - \log_{10}3 - 2\log_{10}7$

= R.H.S.

$\therefore$ L.H.S = R.H.S. (Showed)

গ) $3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5 = \log_{10}360$

সমাধান :

L.H.S $= 3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5$

$= \log_{10}2^3 + \log_{10}3^2 + \log_{10}5$

$= \log_{10}8 + \log_{10}9 + \log_{10}5$

$= \log_{10}(8.9.5)$

$= \log_{10}360$

= RH.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S. (Showed)

৪। সরল কর :

ক) $7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

সমাধান :

প্রদত্ত রাশি $= 7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

$= \log_{10}\left(\frac{10}{9}\right)^7 - \log_{10}\left(\frac{25}{24}\right)^2 + \log_{10}\left(\frac{81}{80}\right)^3$

$= \log_{10}\left(\frac{10^7}{9^7}\right) + \log_{10}\left(\frac{81^3}{80^3}\right) - \log_{10}\left(\frac{25^2}{24^2}\right)$

$= \log_{10}\left(\frac{10^7}{9^7}\times\frac{81^3}{80^3}\right) - \log_{10}\left(\frac{25^2}{24^2}\right)$

$= \log_{10}\left\{\left(\frac{10^7}{9^7}\times\frac{81^3}{80^3}\right)\div\left(\frac{25^2}{24^2}\right)\right\}$

$= \log_{10}\left\{\frac{(5.2)^7}{(3.3)^7}\times\frac{(3\times3\times3\times3)^3}{(5.2.2.2.2)^3}\div\frac{(5.5)^2}{(3.2.2.2)^2}\right\}$

$= \log_{10}\left(\frac{5^7.2^7.3^3.3^3.3^3.3^3}{3^7.3^7.5^3.2^3.2^3.2^3.2^3}\times\frac{3^2.2^2.2^2.2^2}{5^2.5^2}\right)$

$= \log_{10}\frac{5^7.2^{13}.3^{14}}{5^7.2^{12}.3^{14}}$

$= \log_{10}\frac{2^{13}}{2^{12}}$

$= \log_{10}2^{13-12}$

$= \log_{10}2^1$

$= \log_{10}2$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলমান $\log_{10}2$

খ) $\log_7(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}) - \log_3\sqrt[3]{3} + \log_4 2$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \log_7(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}) - \log_3\sqrt[3]{3} + \log_4 2$

$= \log_7\left(7^{\frac{1}{5}}.7^{\frac{1}{2}}\right) - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 2$

$= \log_7 7^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\log_3 3 + \log_4 2$

$= \log_7\left(7^{\frac{2+5}{10}}\right) - \frac{1}{3}.1 + \log_4\sqrt{4}$

$= \log_7 7^{\frac{7}{10}} - \frac{1}{3} + \log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{7}{10}\log_7 7 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_4 4$ $\quad [\because \log_a a = 1]$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{21-10+15}{30}$

$= \frac{36-10}{30}$

$= \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলমান $\frac{13}{15}$

গ) $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

$= \log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - \log_e(b^2c)^3$

$= \log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - \log_e b^6c^3$

$= \log_e\left(\frac{a^3b^3}{c^3}\times\frac{b^3c^3}{d^3}\times\frac{c^3d^3}{a^3}\right) - \log_e b^6c^3$

$= \log_e b^6c^3 - \log_e b^6c^3$

$= 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলমান 0

অনুশীলনী- ৪.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর 10 ভিত্তিক ও e ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর : [পৃষ্ঠ-৮৫]
(i) 2550 (ii) 52.143 (iii) 0.4145 (iv) 0.0742

সমাধান :

i) 2550

2550 এর 10 ভিত্তিক লগ, [AC] [log] [2550] [=] –3.40654018

2550 " e " " [AC] [ln] [2550] [=] – 7.843848638

ii) 52.143

52.143এর 10 ভিত্তিক লগ, [AC] [log] [52.143] [=] 1.717196014

52.143 " e " " [AC] [ln] [52.143] [=] 3.953989944

iii) 0.4145

0.4145এর 10 ভিত্তিক লগ, [AC] [log] [0.4145] [=] – 0.382475465

0.4145 " e " " [AC] [ln] [0.4145] [=] – 0.880682404

iv) 0.0742

0.0742এর 10 ভিত্তিক লগ, [AC] [log] [0.0742] [=] – 1.129596095

0.0742 " e " " [AC] [ln] [0.0742] [=] – 2.600991129

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ১২॥ নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর :
i) 5570 ii) 45.70 iii) 0.4305 iv) 0.000435

সমাধান :

i) $5570 = 5.570 \times 1000 = 5.570 \times 10^3$

∴ সংখ্যাটি লগের পূর্ণক 3।

অন্যভাবে, 5570 সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা 4টি।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 4 - 1 = 3$

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3।

ii) $45.70 = 4.570 \times 10^1$.

∴ সংখ্যাটি লগের পূর্ণক 1।

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে ২টি অঙ্ক আছে।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 2 - 1 = \bar{1}$

∴ 45.70 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1।

iii) $0.4305 = 4.305 \times 10^{-1}$

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক 1।

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর আগে, পূর্ণ অংশে কোনো সার্থক অঙ্ক নেই, বা শূন্যটি অঙ্ক আছে।

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক $= 0 - 1 = -1 = \bar{1}$

অন্যভাবে, 0.4305 সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে কোনো 0 (শূন্য) নেই, অর্থাৎ শূন্যটি 0 আছে।

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক $= -(0 + 1) = -1 = \bar{1}$

∵ 0.4305 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{1}$

iv) $0.000435 = 4.35 \times 10^{-4}$

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(3 + 1) = -4$ বা, $\bar{4}$

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে 3টি 0 (শূন্য) আছে।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(3 + 1) = -4 = \bar{4}$

∴ 0.000435 এর লগের পূর্ণক $\bar{4}$

উদাহরণ– ১৬॥ $\log_e 10$ নির্ণয় কর :

সমাধান : $\log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} 2.71828} = \frac{1}{043429}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 2.30259$ (প্রায়)

বিকল্প : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

[AC] [ln] [10] [=] 2.30259 (প্রায়)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৪.৩

১. কোন শর্তে $a^0 = 1$?
ক $a = 0$
খ $a \neq 0$
গ $a > 0$
ঘ $a \neq 1$
উত্তর : খ. $a \neq 0$

২. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি ?
ক $\sqrt[6]{5}$
খ $(\sqrt[3]{5})^3$
গ $(\sqrt{5})^3$
ঘ $\sqrt[3]{25}$
উত্তর : ঘ. $\sqrt[3]{25}$

৩. সঠিক কোন শর্তে $\log_a a = 1$?
ক $a > 0$
খ $a \neq 1$
গ $a > 0, a \neq 1$
ঘ $a \neq 0, a > 1$
উত্তর : গ. $a > 0$ $a \neq 1$

৪. $\log x^4 = 2$ হলে, x এর মান কত?
ক 2
খ ± 2
গ 4
ঘ 10
উত্তর : ক. 2

৫. একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি?
ক $1 < a < 10$
খ $1 \leq a \leq 10$
গ $1 \leq a < 10$
ঘ $1 < a \leq 10$
উত্তর : গ. $1 \leq a < 10$

৬. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :
i. $\log_a (m)^p = p\log_a m$
ii. $2^4 = 14$ এবং $\log_2 16 = 4$ সমার্থক
iii. $\log_a (m+n) = \log_a m + \log_a n$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii
খ ii ও iii
গ i ও iii
ঘ i, ii ও iii
উত্তর : ক. i ও ii.

৭. 0.0035 এর সাধারণ লগের পূর্ণক কত?
ক 3
খ 1
গ 2
ঘ $\bar{3}$
উত্তর : ঘ. $= \bar{3}$

৮. 0.0225 সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

১. সংখ্যাটির (a^n) আকারের সঠিক রূপ কোনটি?
ক $(2.5)^2$
খ $(0.015)^2$
গ $(1.5)^2$
ঘ $(.15)^2$
উত্তর : ঘ. $(.15)^2$

২. সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক আকার নিচের কোনটি ?
ক 225×10^{-4}
খ 22.5×10^{-3}
গ 2.25×10^{-2}
ঘ $.225 \times 10^{-1}$
উত্তর : গ. 2.25×10^{-2}.

৩. সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত?
ক $\bar{2}$
খ $\bar{1}$
গ 0
ঘ 2
উত্তর : ক. $\bar{2}$

৯. বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর :
ক. 6530
খ. 60.831
গ. 0.000245
ঘ. 37500000
ঙ. 0.00000014

সমাধান :
ক. 6530 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 6.530 \times 10^3$
খ. 60.831 এর বৈজ্ঞানিকরূপ 6.0831×10^1
গ. 0.000245 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 2.45 \times 10^{-4}$
ঘ. 37500000 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 3.75 \times 10^7$
ঙ. 0.00000014 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 1.4 \times 10^{-7}$

১০. সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর :
ক. 10^5
খ. 10^{-5}
গ. 2.53×10^4
ঘ. 9.813×10^{-3}
ঙ. 3.12×10^{-5}

সমাধান :

ক. $= 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 100000$ (Ans)

খ. $10^{-5} = \frac{1}{10^5}$
$= \frac{1}{100000}$
$= 0.00001$ (Ans.)

গ. $2.53 \times 10^4 = 2.53 \times 10000$
$= 25300.00$
$= 25300.$ (Ans.)

ঘ. $9.813 \times 10^{-3} = 9.813 \times \frac{1}{103}$
$= 9.813 \times \frac{1}{1000}$
$= \frac{9813}{1000} \times \frac{1}{1000}$
$= \frac{9813}{1000000}$
$= 0.009813$ (Ans.)

ঙ. $3.12 \times 10^{-5} = 3.12 \times \frac{1}{10^5}$
$= \frac{312}{100} \times \frac{1}{100000}$
$= \frac{312}{10000000}$
$= 0.0000312$ (Ans.)

১১. নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক বের কর (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে) :
ক. 4820
খ. 72.245
গ. 1.734
ঘ. 0.045
ঙ. 0.000036

সমাধান :

ক. 4820 কে বৈজ্ঞানিক প্রকাশ করে পাই,
$4820 = 4.82 \times 10^3$
যেহেতু এখানে 10 এর শক্তি সূচক 3; অতএব 4820 এর লগের পূর্ণক 3 (Ans.)

খ. 72.245 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,
$72.245 = 7.2245 \times 10^1$
$= 7.2245 \times 10^1$
যেহেতু এখানে 10 এর শক্তিসূচক 1;
অতএব 72.245 এর লগের পূর্ণক 1 (Ans.)

গ. 1.734 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,
$1.734 = 1.734 \times 10^0$
যেহেতু এখানে, 10 এর শক্তি সূচক 0; অতএব 1.734 এর লগের পূর্ণক 0 (Ans.)

ঘ. 0.045 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,
$0.045 = 4.5 \times 10^{-2}$
এখানে, 10 এর শক্তি সূচক –2; অতএব 0.045 এর লগের পূর্ণক –2 বা $\bar{2}$ (Ans.)

ঙ. 0.000036 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,
$0.000036 = \frac{36}{1000000}$
$= \frac{36}{10^6}$
$= 36 \times 10^{-6}$
$= 3.6 \times 10^{-5}$
এখানে, 10 এর শক্তি সূচক –5; অতএব 0.000036 এর লগের পূর্ণক –5 বা $\bar{5}$ (Ans.)

১২. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর :
ক. 27 খ. 63.147
গ. 1.405 ঘ. 0.0456
ঙ. 0.000673

সমাধান :
ক. 27.
ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :
[AC] [log] [27] [=] 1.43136 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)
∴ লগ 27 এর পূর্ণক 1 এবং অংশক .43136.

খ. 63.147
ক্যালকুলেটর ব্যহার করি :
[AC] [log] [63.147] [=] 1.80035
(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)
∴ লগ 63.147 এর পূর্ণক 1 এর অংশক 40035

গ) 1.405
ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :
[AC] [log] [1.405] [=] 0.14767
(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)
∴ লগ 1.405 এর পূর্ণক 0 এর অংশক .14767

ঘ) 0.0456
ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :
[AC] [log] [0.0456] [=] – 1.34103
(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)
∴ লগ 0.0456 এর পূর্ণক –1 বা $\bar{1}$ এবং অংশক .34103

ঙ) 0.000673
ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :
[AC] [log] [0.000673] [=] –3.17198
(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)
∴ লগ 0.000673 এর পূর্ণক –3 বা $\bar{3}$ এবং অংশক .17198

১৩। গুণফলের/ভাগফলের সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর :
ক. 5.34×8.7 খ. 0.79×0.56
গ. $22.2642 \div 3.42$ ঘ. $0.19926 \div 32.4$

সমাধান :
ক) 5.34×8.7
$= \log (5.34 \times 8.7)$
$= \log (46.458)$
$= 1.66706$ (Ans.)

খ) 0.79×0.56
$= \log (0.79 \times 0.56)$
$= \log (0.4424)$
$= -0.35418$ (Ans.)

গ) $22.2642 \div 3.42$
$= \log (22.2642 \div 3.42)$
$= \log (6.51)$
$= 0.81358$ (Ans.)

ঘ) $019926 \div 32.4$
$= \log (0.19926 \div 32.4)$
$= \log (0.00615)$
$= -2.21112$ (Ans.)

১৪। যদি log2 = 0.30103, log3 = 0.47712 এবং log7 = 0.84510 হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর :
ক. log 9 খ. log 24
গ. log 42

সমাধান :
ক) log 9
দেওয়া আছে, log3 = 0.47712
∴ log 9 = log (3 × 3)
= log 3 + log 3
= 0.47712 + 0.47712 [মান বসিয়ে]
= 0.95424 (Ans.) (5 দশমিক স্থান পর্যন্ত)

খ) log 28
দেওয়া আছে, log2 = 0.30103
log7 = 0.84510
∴ log 28
= log (2 × 2 × 7)
= log2 + log2 + log7
= 0.30103 + 0.30103 + 0.84510
= 1.44716 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) (Ans.)

গ) log 42
দেওয়া আছে, log 2 = 0.30103
log 3 = 0.47712
log 7 = 0.84510
∴ log 42 = log (2 × 3 × 7)
= log2 + log 3 + log 7
= 0.30103 + 0.47712 + 0.84510
= 1.62325 (Ans.)

১৫। দেওয়া আছে, x = 1000 এবং y = 0.0625
ক) x ও $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ কর। যেখানে a ও b মৌলিক সংখ্যা।
খ) x ও y এর গুণফলকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর।
গ) xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান :
ক) x কে $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ করে পাই,
x = 1000
= 2 × 500
= 2 × 2 × 2 × 125

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 2^3 \times 5^3$ [যেখানে, a ও b মৌলিক সংখ্যা।
$\therefore x = 2^3 5^3$ (Ans.)

খ) দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0.0625$
$\therefore$ x ও y এর গুণফল $= 1000 \times 0.0625$
$\therefore xy = 62.5$

62.5 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 62.5$
$= 6.25 \times 10^1$ (Ans.)

গ) $xy = 62.5$
$= \log (62.5)$
$= 1.79588$
$\therefore$ লগ 62.5 এর পূর্ণক 1 এবং এবং অংশক .79588 (Ans.)

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $\frac{1-x^2}{1+x}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ কত? [ব্লু বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $1-x$ খ $1+x$ গ $1-x^2$ ঘ $1+x^2$ — ক

২. $(5^0)^2 \times (5^2)^0 \times 5^0$ এর মান নিচের কোনটি? [বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 0 খ 1 গ 5 ঘ 25 — খ

৩. $\log_a M + \log_a N =$ নিচের কোনটি? [বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)$ খ $\log_a\left(\frac{N}{M}\right)$ গ $\log_a(MN)$ ঘ $\log_a(MN)^a$ — গ

৪. e ভিত্তিক লগারিদমের অপর নাম কী? [খুলনা পাবলিক কলেজ]
ক সাধারণ লগারিদম খ স্বাভাবিক লগারিদম গ ব্যবহারিক লগারিদম ঘ ব্রিহস লগারিদম — খ

৫. একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ 0.0000000037 সে.মি. এর বৈজ্ঞানিক রূপ কোনটি? [খুলনা পাবলিক কলেজ]
ক 3.7×10^{-10} খ 3.7×10^{-8} গ 0.37×10^{-9} ঘ 3.7×10^{-9} — ঘ

৬. $\log_5 x = 3$ হলে x এর মান কত? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 5 খ 10 গ 125 ঘ 25 — গ

৭. $\log_4 2$ এর মান কত? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 2 খ $\frac{1}{3}$ গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{2}$ — ঘ

৮. $\log_a a$ এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 1 খ a গ 2 ঘ 3 — ক

৯. log1 এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 0 খ 1 গ 2 ঘ 3 — ক

১০. log0 এর মান কোনটি? [... জিলা স্কুল]
ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 0 — ঘ

১১. log7 + log3 এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 21 খ 3×7 গ $7 \div 3$ ঘ log21 — ঘ

১২. $\log_2 16$ এর মান নির্ণয় কর। [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 — ঘ

১৩. সঠিক কোন শর্তে $\log_a 1 = 0$ [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $a > 0$ খ $a \neq 0$ গ $a > 0, a \neq 1$ ঘ $a \neq 0, a > 1$ — গ

১৪. $a \neq 0$ হলে, নিচের কোনটি $(a^{-1})^{-1}$ এর সঠিক মান? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক a খ a^{-1} গ a^{-2} ঘ a^2 — ক

১৫. $2^{x+1} = 32$ হলে, x এর মান কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{7}{2}$ গ 41 ঘ 9 — গ

১৬. $m + n = -2$ হলে, $(-2)^n \times (-2)^m \times (-2)^2$ এর মান কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক -2 খ -1 গ 1 ঘ 2 — গ

১৭. $\log_x 324 = 4$ হলে, x = কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $3\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{3}$ গ $\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{3}$ — ক

১৮. $\log_4{}^2 =$ কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক log 2. log4 খ log 2 + log 4 গ 2 ঘ $\frac{1}{2}$ — ঘ

১৯. $\log_{10} = -2$ হলে x = কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক 10 খ $\frac{1}{10}$ গ 100 ঘ $\frac{1}{100}$ — ঘ

২০. $\log_x 25 = 2$ হলে x = কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক -5 খ 5 গ ± 5 — খ

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- চলকের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার একঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে ও সমাধান সেট নির্ণয় করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

❖ **চলক :** যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের যে কোন উপাদানকে বুঝায় তাকে চলক বা চল বলে।
যেমন : $A = \{x \neq R : 1 < x < 20\}$ সেটে x হল চলক কেননা এ সেটে x এর মান 2, 3, 4, ...,19 ইত্যাদির যে কোনটি হতে পারে।

❖ **গাণিতিক বাক্য :** গাণিতিক শব্দাবলি ক্রিয়াপদ দ্বারা যুক্ত হলে তাকে গাণিতিক বাক্য বলে। যেমন : $5 + 8 = 13, 2 \times 3 > 4$, $10 < 12$ ইত্যাদি হলো গাণিতিক বাক্য। যেখানে '=' (সমান হওয়া), '>' (বড় হওয়া), '<' (ছোট হওয়া) ইত্যাদি ক্রিয়া পদ।

❖ **গাণিতিক খোলা বাক্য :** কোন চলক সম্বলিত গাণিতিক বাক্যকে গাণিতিক খোলা বাক্য বলে।
যেমন : $x + 3 = 7$

❖ **গাণিতিক উক্তি :** কোন গাণিতিক বাক্য সত্য না মিথ্যা নিশ্চিতভাবে বলা সম্ভব হলে, ঐ বাক্যকে গাণিতিক উক্তি বলে। উদা: $2 + 3 = 5$; $2 - 3 = 1$.

❖ **সমীকরণ :** দুইটি বহুপদীকে সমতা চিহ্ন দ্বারা সমীকৃত করলে তাকে সমীকরণ বলে। যেমন : $2x - 4 + x = 6$, $x^2 + y^2 = 5$ ইত্যাদি।

❖ **অভেদ :** সমান চিহ্নের দুই পক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোন ভেদ নেই বলেই অভেদ।
যেমন : $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = 4a$ একটি অভেদ;
এখানে a এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে।

❖ **সমীকরণের মূল :** কোন সমীকরণে চলক বা চলকসমূহের যে বা যেসব মানের জন্য বামপক্ষ ও ডানপক্ষ পরস্পর সমান হয় সে বা সেসব মানকে উক্ত সমীকরণের মূল বলে।
যেমন : $x + 3 = 7$ সমীকরণে x এর মান 4 বসালে বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ সমান হয়। কাজেই এই সমীকরণের মূল, $x = 4$.

❖ **সমীকরণের সমাধান :** কোন সমীকরণের মূল বা বীজ নির্ণয় করাকে এর সমাধান বলা হয়।

❖ **সমীকরণ সমাধানের কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ :**
স্বতঃসিদ্ধ ১. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশির সাথে একই রাশি যোগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ২. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশি থেকে একই রাশি বিয়োগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ৩. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ৪. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই রাশি দ্বারা (শূন্য ব্যতীত) ভাগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।

যেমন : $x + 2 = 1$ হলে, $\frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}$ হবে।

স্বতঃসিদ্ধ ৫. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই ঘাতে উন্নীত করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।

যেমন : $x + 2 = 5$ হলে, $(x + 2)^2 = 5^2$ হবে।

❖ **দ্বিঘাত সমীকরণ :** যে সমীকরণকে সমাধান করলে অজ্ঞাত একটি চলকের দু'টি মূল বা বীজ পাওয়া যায়, তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত বা শক্তি 2 থাকে। যেমন : $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এর সমাধান,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অনুশীলনী- ৫.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-১: $(\sqrt{5}+1)x+4=4\sqrt{5}$ হলে দেখাও যে, $x=6-2\sqrt{5}$ [পৃষ্ঠা- ৯১]

সমাধান: $(\sqrt{5}+1)x+4=4\sqrt{5}$

বা, $(\sqrt{5}+1)x=4\sqrt{5}-4$

বা, $(\sqrt{5}+1)x=4(\sqrt{5}-1)$

বা, $x=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)}$

বা, $x=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

[লব ও হরকে দ্বারা $(\sqrt{5}-1)$ গুণ করে]

বা, $x=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5})^2-1}$

বা, $x=\dfrac{4\{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2\}}{5-1}$

বা, $x=\dfrac{4(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$

বা, $x=6-2\sqrt{5}$ (দেখানো হলো)

২। সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ : $(\sqrt{4x-3})+5=2$

সমাধান: $(\sqrt{4x-3})+5=2$

বা, $\sqrt{4x-3}=2-5$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\sqrt{4x-3}=-3$

বা, $(\sqrt{4x-3})^2=(-3)^2$ [বর্গ করে]

বা, $4x-3=9$

বা, $4x=9+3$

বা, $4x=12$

বা, $x=3$

প্রদত্ত সমীকরণে বর্গমূল চিহ্ন থাকার কারণে শুদ্ধি পরীক্ষা প্রয়োজন।

প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$\sqrt{4\times3-3}+5=2$

বা, $\sqrt{12-3}+5=3$

বা, $\sqrt{9}+5=2$

বা, $3+5=2$

বা, $8=2$, যা অসম্ভব।

$\therefore$ সমীকরণটির কোনো সমাধান নেই।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\{\}$ বা, ϕ

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-৩। সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ :

$$\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$$

সমাধান: $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-1}=\dfrac{2x-1}{5}$

বা, $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\dfrac{6x+1-6x+3}{15}=\dfrac{2x-4}{7x-1}$

বা, $\dfrac{4}{15}=\dfrac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4)=4(7x-1)$ [আড় গুণন করে]

বা, $30x-60=28x-4$

বা, $30x-28x=60-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x=56$

বা, $x=28$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান 28 এবং সমাধান সেট, $S=\{28\}$

উদাহরণ-৪। সমাধান কর :

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$$

সমাধান: $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$

বা, $\dfrac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$

বা, $\dfrac{2x-7}{x^2-7x+12}=\dfrac{2x-7}{x^2-7x+10}$

প্রাপ্ত সমীকরণের দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে একমাত্র লবের মান শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$\therefore 2x-7=0$ বা, $2x-7$

$\therefore x=\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\dfrac{7}{2}$

উদাহরণ-৬। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান

বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম হবে। সংখ্যাটি নির্[illegible]

সমাধান : মনে করি, [illegible]

অতএব, একক স্থানীয় [illegible]

∴ সংখ্যাটি $10x + (x + [illegible])$ বা, $11x$ [illegible]

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় [illegible] পরিবর্তিত [illegible] সংখ্যাটি হবে $10(x + 2) + x$ বা, $11x + 20$

প্রশ্নমতে, $11x + 20 = 2(11x + 2) - 6$

বা, $11x + 20 = 22x + 4 - 6$

বা, $22x - 11x = 20 + 6 - 4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $11x = 22$

বা, $x = 2$

∴ সংখ্যাটি $11x + 2 = 11 \times 2 + 2 = 24$

∴ প্রদত্ত সংখ্যাটি 24

উদাহরণ–৪॥ একটি শ্রেণির প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসলে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতি বেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত?

সমাধান : মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x

যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে,

সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x}{4} + 3$

আবার, যেহেতু প্রতি বেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x - 6}{3}$

যেহেতু বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং, $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x - 6}{3}$

বা, $\frac{x + 12}{4} = \frac{x - 6}{3}$

বা, $4x - 24 = 3x + 36$

বা, $4x - 3x = 36 + 24$

বা, $x = 60$

[illegible] 56000 টাকার কিছু টাকা বার্ষিক 12% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট 6400 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 12% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?

সমাধান : মনে করি, কবির সাহেব 12% মুনাফায় x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

∴ তিনি 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন $(56000 - x)$ টাকা।

এখন, x টাকার 1 বছরের মুনাফা $x \times \frac{12}{100}$ টাকা

বা, $\frac{12x}{100}$ টাকা।

আবার, $(56000 - x)$ টাকার 1 বছরের মুনাফা

$(56000 - x)\frac{10}{100}$ টাকা

বা, $\frac{10(56000 - x)}{100}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{12x}{100} + \frac{10(56000 - x)}{100} = 6400$

বা, $12x + 560000 - 10x = 640000$

বা, $2x = 640000 - 560000$

বা, $2x = 80000$

বা, $x = 40000$

∴ কবির সাহেব 12% মুনাফায় 4000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন। (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৫.১

সমাধান কর (১ – ১০) :

১। $3(5x - 3) = 2(x + 2)$

সমাধান : $3(5x - 3) = 2(x + 2)$

বা, $15x - 9 = 2x + 4$

বা, $15x - 2x = 4 + 9$

বা, $13x = 13$

বা, $x = \frac{13}{13}$

∴ $x = 1$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = 1$

২। $\frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$

সমাধান : $\frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$

বা, $\frac{a^2y - b^2y}{ab} = a^2 - b^2$

বা, $\frac{y(a^2 - b^2)}{ab} = a^2 - b^2$

বা, $\frac{y}{ab} = 1$ [উভয় পক্ষকে $a^2 - b^2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y = ab$

∴ $y = ab$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y = ab$

৩। $(z + 1)(z - 2) = (z - 4)(z + 2)$

সমাধান : $(z + 1)(z - 2) = (z - 4)(z + 2)$

বা, $z^2 - 2z + z - 2 = z^2 + 2z - 4z - 8$

বা, $z^2 - z - 2 = z^2 - 2z - 8$

বা, $z^2 - z - z^2 + 2z = 2 - 8$ [পক্ষন্তর করে]

বা, $z = -6$

∴ $z = -6$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z = -6$

৪। $\frac{7x}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{4}{3}$

সমাধান : $\frac{7x}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{4}{3}$

বা, $\frac{7x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2x}{5} - \frac{3}{5}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{7x + 4}{3} = \frac{2x - 3}{5}$

বা, $5(7x + 4) = 3(2x - 3)$ [বজ্রগুণ করে]

বা, $35x + 20 = 6x - 9$

বা, $35x - 6x = -9 - 20$

বা, $29x = -29$

বা, $x = \frac{-29}{29}$

$\therefore x = -1$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = -1$

৫। $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

সমাধান : $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{4(3x+2) + 9(2x+1)}{(2x+1)(3x+2)} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{12x + 8 + 18x + 9}{(2x+1)(3x+2)} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{30x + 17}{6x^2 + 4x + 3x + 2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{30x + 17}{6x^2 + 7x + 2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $(5x + 4)(30x + 17) = 25(6x^2 + 7x + 2)$

বা, $150x^2 + 85x + 120x + 68 = 150x^2 + 175x + 50$ [বজ্রগুণ করে]

বা, $150x^2 + 205x + 68 = 150x^2 + 175x + 50$

বা, $150x^2 + 205x - 150x^2 - 175x = 50 - 68$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $30x = -18$

বা, $x = \frac{-18}{30}$

$\therefore x = -\frac{3}{5}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{3}{5}$

৬। $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

সমাধান : $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1(x+3) - 1(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{1(x+4) - 1(x+2)}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{x + 3 - x - 1}{(x+1)(x+3)} = \frac{x + 4 - x - 2}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+4)}$

বা, $(x+2)(x+4) = (x+1)(x+3)$

বা, $x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 3x + x + 3$

বা, $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 3$

বা, $x^2 + 6x - x^2 - 4x = 3 - 8$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = -5$

বা, $x = \frac{-5}{2}$

$\therefore x = \frac{-5}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-5}{2}$

৭। $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

সমাধান : $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{x-a-b} + \frac{b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a-b} - \frac{b}{x-b}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{a(x-a-b) - a(x-a)}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{b(x-b) - b(x-a-b)}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{ax - a^2 - ab - ax + a^2}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{bx - b^2 - bx + ab + b^2}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{-ab}{x-a} = \frac{ab}{x-b}$ [উভয় পক্ষকে $x - a - b$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{-1}{x-a} = \frac{1}{x-b}$ [উভয় পক্ষকে $x - a - b$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $-1(x - b) = 1(x - a)$

বা, $-x + b = x - a$

বা, $-x - x = -a - b$

বা, $-2x = -(a + b)$

বা, $2x = a + b$

$\therefore x = \frac{a+b}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{a+b}{2}$

৮। $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

সমাধান : $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} + 2 - 2 = 0$

বা, $\left(\frac{x-a}{b} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-3a-3b}{a+b} + 2\right) = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-b-a}{a} + \frac{x-3a-3b+2a+2b}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-a-b}{a} + \frac{x-a-b}{a+b} = 0$

বা, $(x-a-b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$

বা, $x - a - b = 0$ $\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} \neq 0 \text{ যা } x \text{ বর্জিত রাশি}\right]$

$\therefore x = a + b$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = a + b$

৯। $\frac{x-a}{a^2-b^2} = \frac{x-b}{b^2-a^2}$

সমাধান : $\frac{x-a}{a^2-b^2} = \frac{x-b}{b^2-a^2}$

বা, $\frac{x-a}{a^2-b^2} = -\frac{x-b}{(a^2-b^2)}$

বা, $x - a = -(x - b)$ [উভয় পক্ষকে $a^2 - b^2$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x - a = -x + b$

বা, $x + x = a + b$

বা, $2x = a + b$

$\therefore x = \frac{a+b}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{a+b}{2}$

১০। $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

সমাধান : $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

বা, $(3+\sqrt{3})z=5+3\sqrt{3}-2$

বা, $(3+\sqrt{3})z=3\sqrt{3}+3$

বা, $z=\frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}}$

বা, $z=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

বা, $z=\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})}$

$\therefore\ z=\sqrt{3}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z=\sqrt{3}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর : (১১ – ১৯)

১১। $2x(x+3)=2x^2+12$

সমাধান : $2x(x+3)=2x^2+12$

বা, $2x^2+6x=2x^2+12$

বা, $2x^2+6x-2x^2=12$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $6x=12$

বা, $x=\frac{12}{6}$

$\therefore\ x=2$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট, $x=\{2\}$

১২। $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

সমাধান : $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

বা, $2x-3x=-4-3\sqrt{2}-\sqrt{2}$

বা, $-x=-4-4\sqrt{2}$

বা, $-x=-4(1+\sqrt{2})$

বা, $x=4(1+\sqrt{2})$

প্রদত্ত সমীকরণে বর্গমূলের চিহ্ন থাকার কারণে শুদ্ধি পরীক্ষা প্রয়োজন।

প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x=4(1+\sqrt{2})$ বসিয়ে পাই,

$2\{4(1+\sqrt{2})\}+\sqrt{2}=3\{4(1+\sqrt{2})\}-4-3\sqrt{2}$

বা, $8(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=12(1+\sqrt{2})-4-3\sqrt{2}$

বা, $8+8\sqrt{2}+\sqrt{2}=12+12\sqrt{2}-4-3\sqrt{2}$

বা, $8+9\sqrt{2}=8+9\sqrt{2}$, যা সত্য

$\therefore$ নির্ণয়ে সমাধান সেট, $S=\{4(1+\sqrt{2})\}$

১৩। $\frac{x+a}{x-b}=\frac{x+a}{x+c}$

সমাধান : $\frac{x+a}{x-b}=\frac{x+a}{x+c}$

বা, $(x+a)(x+c)=(x+a)(x-b)$

বা, $x^2+xc+xa+ac=x^2-bx+ax-ab$

বা, $x^2+xc+xa+ac-x^2+bx-ax+ab=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $xc+ac+bx+ab=0$

বা, $c(x+a)+b(x+a)=0$

বা, $(x+a)(c+b)=0$

এখানে, $x+a=0$ $\quad(c+b)\neq 0$ কারণ তা x বর্জিত রাশি

$\therefore\ x=-a$

$\therefore$ সমাধান, $x=-a$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\{-a\}$

১৪। $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

সমাধান : $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $\frac{z-2}{z-1}+\frac{1}{z-1}=2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{z-2+1}{(z-1)}=2$

বা, $z-1=2(z-1)$

বা, $z-1=2z-2)$

বা, $z-2z=-2+1$

বা, $-z=-1$

$\therefore\ z=1$

কিন্তু $z=1$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ সমীকরণটির কোনো সমাধান নেই।

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\{?\}$

১৫। $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

সমাধান : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{x+1+x}{x(x+1)}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{x(x+1)}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{2}{x-1}$

বা, $(2x+1)(x-1)=2(x^2+x)$

বা, $2x^2-2x+x-1=2x^2+2x$

বা, $2x^2-x-1=2x^2+2x$

বা, $x^2-x-2x^2-2x=1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $3x=1$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

অতএব র্ণেয় সমাধান সেট $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

১৬। $\dfrac{m}{m-x}+\dfrac{n}{n-x}=\dfrac{m+n}{m+n-x}$

সমাধান : $\dfrac{m}{m-x}+\dfrac{n}{n-x}=\dfrac{m+n}{m+n-x}$

বা, $\dfrac{m}{m-x}+\dfrac{n}{n-x}=\dfrac{m}{m+n-x}+\dfrac{n}{m+n-x}$

বা, $\dfrac{m}{m-x}-\dfrac{m}{m+n-x}=\dfrac{n}{m+n-x}-\dfrac{n}{n-x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\dfrac{m(m+n-x)-m(m-x)}{(m-x)(m+n-x)}=\dfrac{n(n-x)-n(m+n-x)}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\dfrac{m^2+mn-mx-m^2+mx}{(m-x)(m+n-x)}=\dfrac{n^2-nx-nm-n^2+nx}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\dfrac{mn}{(m-x)(m+n-x)}=\dfrac{-mn}{(m+n-x)}$

বা, $\dfrac{1}{(m-x)(m+n-x)}=\dfrac{-1}{(m+n-x)(n-x)}$ [উভয় পক্ষে mn দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(m+n-x)(n-x)=-\{(m-x)(m+n-x)\}$

বা, $(m+n-x)(n-x)+(m-x)(m+n-x)=0$

বা, $(m+n-x)(n-x+m-x)=0$

বা, $(m+n-x))(m+n-2x)=0$

∴ হয় $m+n-x=0$ অথবা $m+n-2x=0$

কিন্তু $m+n-x=0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের ডানপক্ষের মান $\frac{m+n}{0}$ অর্থাৎ অসীম হয়।

ফলে $m+n-x=0$ গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং $m+n-2x=0$

বা, $m+n=2x$

∴ $x=\dfrac{m+n}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\left\{\dfrac{m+n}{2}\right\}$

১৭। $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+3}$

সমাধান : $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+3}$

বা, $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\dfrac{(x+4)-1(x+2)}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{1(x+5)-1(x+3)}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\dfrac{x+4-x-2}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{x+5-x-3}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{2}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(x+3)(x+5)=(x+2)(x+4)$

বা, $x^2+5x+3x+15=x^2+4x+2x+8$

বা, $x^2+8x+15=x^2+6x+8$

বা, $x^2+8x-6x-x^2=8-15$

বা, $2x=-7$

∴ $x=\dfrac{-7}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\left\{\dfrac{-7}{2}\right\}$

১৮। $\dfrac{2t-6}{9}+\dfrac{15-2t}{12-5t}=\dfrac{4t-15}{18}$

সমাধান : $\dfrac{2t-6}{9}+\dfrac{15-2t}{12-5t}=\dfrac{4t-15}{18}$

বা, $\dfrac{2t-6}{9}-\dfrac{4t-15}{18}=-\left(\dfrac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\dfrac{2(2t-6)-(4t-15)}{18}=-\left(\dfrac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\dfrac{4t-12-4t+15}{18}=-\left(\dfrac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\dfrac{3}{18}=-\left(\dfrac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\dfrac{1}{6}=-\dfrac{15+2t}{12-5t}$

বা, $12-5t=-90+12t$

বা, $12+90=12t+5t$

বা, $102=17t$

বা, $t=\dfrac{102}{17}$

∴ $t=6$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\{6\}$

১৯। $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b}+\frac{x+2c^2+a^2}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2}{c+a}=0$

সমাধান: $=\frac{x+2b^2+c^2}{a+b}+\frac{x+2c^2+a^2}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2}{c+a}=0$

বা, $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b}+\frac{x+2c^2+a^2}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2}{c+a}+(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$ [$\because (b-c)+(c-a)+(a-b)=0$]

বা, $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b}+(a-b)+\frac{x+2c^2+a^2}{b+c}+(b-c)+\frac{x+2a^2+b^2}{c+a}+(c-a)=0$

বা, $\frac{x+2b^2+c^2+(a-b)(a+b)}{a+b}+\frac{x+2c^2+a^2+(b-c)(b+c)}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2+(c+a)(c-a)}{c+a}+=0$

বা, $\frac{x+c^2+2b^2+a^2-b^2}{a+b}+\frac{x+a^2+2c^2+b^2-c^2}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2+c^2-a^2}{c+a}=0$

বা, $\frac{x+c^2+a^2+b^2}{a+b}+\frac{x+a^2+b^2+c^2}{b+c}+\frac{x+a^2+b^2+c^2}{c+a}=0$

বা, $\frac{x+a^2+b^2+c^2}{a+b}+\frac{x+a^2+b^2+c^2}{b+c}+\frac{x+a^2+b^2+c^2}{c+a}=0$

বা, $(x+a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+a}\right)=0$

কিন্তু $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\neq 0$ [কারণ x বর্জিত রাশি]

সুতরাং $x+a^2+b^2+c^2=0$

বা, $x=-a^2-b^2-c^2$

$\therefore x=-(a^2+b^2+c^2)$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\{-(a^2+b^2+c^2)\}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (20 – 29) :

২০। একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, একটি সংখ্যা x

$\therefore$ অপর সংখ্যাটি = x এর $\frac{2}{5}=\frac{2x}{5}$

প্রশ্নমতে, $x+\frac{2x}{5}=98$

বা, $\frac{5x+2x}{5}=98$

বা, $7x=490$

বা, $x=\frac{490}{7}$

$\therefore x=70$

এখন, একটি সংখ্যা $x=70$

$\therefore$ অপর সংখ্যাটি $=\frac{2x}{5}=\frac{2\times70}{5}=\frac{140}{5}=28$

অতএব সংখ্যা দুটি 28, 70

২১। একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\frac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ভগ্নাংশটি প্রকৃত বলে তার লব হর অপেক্ষা ছোট হবে।

ধরি, ভগ্নাংশটির লব = x তাহলে, ভগ্নাংশটির হর = x + 1

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{x+1}$

লব থেকে 2 বিয়োগ এবং হরের সাথে 2 যোগ করলে নতুন ভগ্নাংশটি হয় $=\frac{x-2}{x+1+2}$ অর্থাৎ $\frac{x-2}{x+3}$

প্রশ্নমতে, $\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6}$

বা, $6(x-2)=x+3$

বা, $6x-12=x+3$

বা, $6x-x=12+3$

বা, $5x=15$

বা, $x=\frac{15}{5}$

$\therefore x=3$

অতএব, ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{x+1}=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{3}{4}$

২২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: এখানে, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি = 9

মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অংক = x

তাহলে, দশক স্থানীয় অংক = 9 – x

$\therefore$ সংখ্যাটি = 10 × দশক স্থানীয় অংক + একক স্থানীয় অংক

$=10\times(9-x)+x=90-10x+x=90-9x$

আবার, অংক দুইটি স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি

$=10\times x+(9-x)=9x+9$

এখন, প্রশ্নমতে, $9x+9=90-9x-45$

বা, $9x+9x=45-9$

বা, $18x=36$

বা, $x=\frac{36}{18}$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 90 - 9x$

$= 90 - 9 \times 2 = 90 - 9 \times 2$

$= 90 - 18 = 72$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 72 (Ans.)

২৩। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অংকটি $= x$

তাহলে, দশক স্থানীয় অংকটি $= 2x$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10 \times 2x + x = 20x + x = 21x$

আবার, অংকদ্বয়ের সমষ্টি $= x + 2x = 3x$

$\therefore$ অংকদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ $= 3x \times 7 = 21x$

অতএব, সংখ্যাটি = অংকদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ অর্থাৎ $21x$ (Showed)

২৪। একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। বছর শেষে 256 টাকা মুনাফা পেলেন তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন?

সমাধান: দেয়া আছে, মোট টাকা = 5600 টাকা

প্রাপ্ত মুনাফা = 256 টাকা

সুদের হার = 5% ও 4% (সরল সুদ)

ধরি, 5% হারে বিনিয়োগের পরিমাণ = x টাকা

তাহলে, 4% হারে বিনিয়োগের পরিমাণ = $(5600 - x)$ টাকা।

আমরা জানি, সুদ = আসল × সুদের হার × বছর

$\therefore$ 5% হারে x টাকার 1 বছরের সুদ $= x \times \frac{5}{100} \times 1$

$= \frac{x}{20}$ টাকা

এবং 4% হারে $(5600 - x)$ টাকার 1 বছরের সুদ

$= (5600 - x) \times \frac{4}{100} \times 1 = \frac{5600 - x}{25}$ টাকা

$\therefore$ মোট সুদ $= \frac{x}{20} + \frac{5600 - x}{25}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{20} + \frac{5600 - x}{25} = 256$

বা, $\frac{x}{20} + \frac{5600}{25} - \frac{x}{25} = 256$

বা, $\frac{x}{20} + 224 - \frac{x}{25} = 256$

বা, $\frac{x}{20} - \frac{x}{25} = 256 - 224$

বা, $\frac{5x - 4x}{100} = 32$

বা, $\frac{x}{100} = 32$

বা, $x = 3200$

অতএব, 5% হার সুদে বিনিয়োগের পরিমাণ 3200 টাকা। (Ans.)

২৫। একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47; মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকেরটর ভাড়ায় দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?

সমাধান: লঞ্চের মোট যাত্রী সংখ্যা = 47

মনে করি, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা = x

$\therefore$ ডেকের যাত্রী সংখ্যা = $(47 - x)$

এখন, ডেকের মাথাপিছু ভাড়া = 30 টাকা

$\therefore$ ডেকের মোট ভাড়া = $30 \times (47 - x)$ টাকা

$\therefore$ কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া = 2 × মাথাপিছু ডেকের ভাড়া = $2 \times 30 = 60$ টাকা

$\therefore$ কেবিনের মোট ভাড়া = $60x$ টাকা

$\therefore$ লঞ্চের সর্বমোট ভাড়া = কেবিনের ভাড়া + ডেকের ভাড়া = $60x + 30 \times (47 - x)$

প্রশ্নমতে, $60x + 30(47 - x) = 1680$

বা, $60x + 1410 - 30x = 1680$

বা, $30x = 1680 - 1410$

বা, $30x = 270$

বা, $x = \frac{270}{30}$

$\therefore x = 9$

অতএব, কেবিনের নির্ণেয় যাত্রী সংখ্যা 9 জন

২৬। 120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

সমাধান: দেওয়া আছে, পঁচিশ ও পঞ্চাশ পয়সার মোট মুদ্রার সংখ্যা 120টি।

এবং সর্বমোট মুদ্রার মান 35 টাকা।

ধরি, পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা = x

তাহলে পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা = $(120 - x)$

এখন, পঁচিশ পয়সার মোট মুদ্রার মান = $25x$ পয়সা

এবং পঞ্চাশ " " " = $50(120 - x)$ পয়সা

$\therefore$ সর্বমোট মুদ্রার মান = $25x + 50(120 - x)$ পয়সা

$= (25x + 6000 - 50x)$ "

$= (6000 - 25x)$ "

$= \frac{6000 - 25x}{100}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{6000 - 25x}{100} = 35$

বা, $6000 - 25x = 3500$

বা, $-25x = 3500 - 6000$

বা, $-25x = -2500$

বা, $x = \frac{-2500}{-25}$

$\therefore x = 100$

$\therefore$ পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100

এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা সংখ্যা = $(120 - 100) = 20$

$\therefore$ নির্ণেয় পঁচিশ পয়সার মুদ্রা সংখ্যা 100টি

এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা সংখ্যা 20টি

২৭। একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে?

সমাধান: দেয়া আছে, 5 ঘণ্টায় যায় 240 কি.মি.

১ম অংশ যায় ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে

২য় অংশ যায় ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে

ধরি, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে যায় x কি.মি.

তাহলে, ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যায় $(240 - x)$ কি.মি.

প্রথম অংশে 60 কি. মি. যায় 1 ঘণ্টায়

∴ " " 1 " " $\frac{1}{60}$ "

∴ " " x " " $\frac{x}{60}$ "

আবার, দ্বিতীয় অংশে 40 কি.মি. যায় 1 ঘণ্টায়

∴ " " 1 " " $\frac{1}{40}$ "

∴ " " (240–x) " " $\frac{240-x}{40}$ "

∴ মোট সময় $= \left(\frac{x}{60}+\frac{240-x}{40}\right)$ ঘণ্টা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{60}+\frac{240-x}{40}=5$

বা, $\frac{2x+3(240-x)}{120}=5$

বা, $\frac{2x+720-3x}{120}=5$

বা, $\frac{720-x}{120}=5$

বা, $720-x=600$

বা, $-x=600-720$

বা, $-x=-120$

বা, $x=120$

অতএব, ঐ ব্যক্তি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে 120 কি. মি. পথ অতিক্রম করেছিল। (Ans.)

☐ অনুশীলনী- ৫.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ কাজ :

[পৃষ্ঠা–৯৬]

১। $x^2-1=0$ সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে a, b, c এর মান লেখ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2-1=0$ .... (i)

এবং $ax^2+bx+c=0$ .... (ii)

(i) সমীকরণকে লেখা যায়, $x^2-0.x-1=0$ .... (iii)

(ii) নং ও (iii) সমীকরণ তুলনা করে পাই,

∴ $a=2, b=0, c=-1$

২। $(x-1)^2=0$ সমীকরণটির ঘাত কত? এর মূল কয়টি ও কী কী?

সমাধান: দেওয়া আছে, $(x-1)^2=0$

বা, $(x-1)(x-1)=0$

∴ $x=1, 1$

প্রদত্ত সমীকরণের ঘাত = 2

∴ সমীকরণের মূল 2টি এবং সেগুলো হলো 1, 1.

☐ কাজ–: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর :

১। একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে ঐ সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল ঠিক পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয়গুণের সমান হবে। সংখ্যাটি কত? [পৃষ্ঠা–৯৮]

সমাধান: মনে করি, স্বাভাবিক সংখ্যাটি x

প্রশ্নমতে, $x^2+x=9(x+1)$

বা, $x^2+x=9x+9$

বা, $x^2+x-9x-9=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2-8x-9=0$

বা, $x^2-9x+x-9=0$

বা, $x(x-9)+1(x-9)=0$

বা, $(x-9)(x+1)=0$

বা, $x-9=0$ অথবা, $x+1=0$

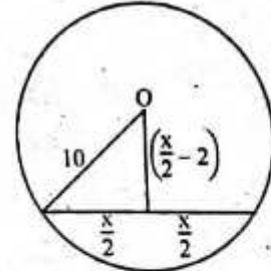
বা, $x=9$ বা, $x=-1$

∴ $x=9$ ∴ $x=-1$

[ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব নির্ণেয় স্বাভাবিক সংখ্যা = 9

২। 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে একটি জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বৃত্তটির অর্ধ–জ্যা অপেক্ষা 2 সে.মি. কম। আনুমানিক চিত্র অঙ্কন করে জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, জ্যাটির দৈর্ঘ্য x সে.মি.

∴ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-2\right)^2=(10)^2$

বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}-2.\frac{x}{2}.2+(2)^2=100$

বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}-2x+4=100$

বা, $\frac{2x^2}{4}-2x=100-4$

বা, $\frac{x^2}{2}-2x=96$

বা, $x^2-4x=192$

বা, $x^2-4x-192=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2-16x+12x-192=0$

বা, $x(x-16)+12(x-16)=0$

বা, $(x-16)(x+12)=0$

বা, $x-16=0$ অথবা $x+12=0$

বা, $x=16$ বা, $x=-12$

∴ $x=16$ ∴ $x=-12$

[ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব নির্ণেয় জ্যাটির দৈর্ঘ্য 16 সে.মি.।

240 টাকায় (x + 1)টি কলম পেলে তবে একটি কলমের দাম পড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$

বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240-x}{x}$

বা, $240x = (x+1)(240-x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x+16) - 15(x+16) = 0$

বা, $(x+16)(x-15) = 0$

$\therefore x + 16 = 0$, অথবা $x - 15 = 0$

$x + 16 = 0$ হলে, $x = -16$

$x - 15 = 0$ হলে, $x = 15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x \neq 16$; $\therefore x = 15$

$\therefore$ শাহিক 15টি কলম কিনেছিল। **(Ans.)**

উদাহরণ–১৬॥ একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর 1950; একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 34 যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 কমে গেল।

ক. পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ। ২

খ. প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2 + 35x - 1950 = 0$. ৪

গ. x এর মান বের করে দুইক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর। ৪

সমাধান:

...

নতুন ছাত্রের নম্বরসহ (x + 1) জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড়

$\frac{1950 + 34}{x+1} = \frac{1984}{x+1}$

খ. প্রশ্নমতে $\frac{1950}{x} = \frac{1984}{x+1} + 1$

বা, $\frac{1950}{x} - \frac{1984}{x+1} = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1950x + 1950 - 1984x}{x(x+1)} = 1$

বা, $x^2 + x = 1950x - 1984x + 1950x$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + x = 1950 - 34x$

$\therefore x^2 + 35x - 1950 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. 'খ' থেকে পাই, $x^2 + 35x - 1950 = 0$

বা, $x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$

বা, $x(x+65) - 30(x+65) = 0$

বা, $(x+65)(x-30) = 0$

$\therefore x + 65 = 0$, অথবা, $x - 30 = 0$

$x + 65 = 0$ হলে, $x = -65$ যা, গ্রহণযোগ্য নয়

আবার, $x - 30 = 0$ হলে, $x = 30$

$\therefore x = 30$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে গড় $= \frac{1950}{30} = 65$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, গড় $= \frac{1984}{31} = 64$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৫.২

১. x কে চলক ধরে $a^2x + b = 0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি?
ক 3 খ 2
গ 1 ঘ 0 — (গ)

২. নিচের কোনটি অভেদ?
ক $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 4x$
খ $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$
গ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 2ab$
ঘ $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — (খ)

৩. $(x-4)^2 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?
ক 1টি খ 2টি
গ 3টি ঘ 4টি — (খ)

৪. $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?
ক 3, 4 খ 3, –4
গ –3, 4 ঘ –3, –4 — (গ)

৫. $3x^2 - x + 5 = 0$ সমীকরণে x এ সহগ কত?
ক 3 খ 2
গ 1 ঘ –1 — (ঘ)

৬. নিচের সমীকরণগুলো লক্ষ কর :
i. $2x + 3 = 9$
ii. $\frac{x}{2} - 2 = -1$
iii. $2x + 1 = 5$
উপরের কোন সমীকরণগুলো পরস্পর সমতুল?
ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii — (খ)

৭. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি?
ক {a, b} খ {a, –b}
গ {–a, b} ঘ {–a, –b} — (ক)

৮. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। এই তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

১. একক স্থানীয় অঙ্ক x হলে, সংখ্যাটি কত?
ক 2x খ 3x
গ 12x ঘ 21x — (ঘ)

২. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে?
ক 3x খ 4x
গ 12x ঘ 21x — (গ)

৩. x = 2 হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত?
ক 18 খ 20
গ 34 ঘ 36 — (ক)

সমাধান কর : (৯ – ১৮)

৯। $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$

হয় $x+2=0$ অথবা, $x-\sqrt{3}=0$

বা, $x=-2$ বা, $x=\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=-2, \sqrt{3}$

১০। $(\sqrt{2x}+3)(\sqrt{3x}-2)=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(\sqrt{2x}+3)(\sqrt{3x}-2)=0$

হয় $\sqrt{2x}+3=0$ অথবা, $\sqrt{3x}-2=0$

বা, $\sqrt{2x}=-3$ বা, $\sqrt{3x}=2$

বা, $x=\frac{-3}{\sqrt{2}}$ বা, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $x=\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ বা, $x=\frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}$

$\therefore x=-\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ বা, $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x=-\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

১১। $y(y-5)=6$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি

$y(y-5)=6$

বা, $y^2-5y=6$

বা, $y^2-5y-6=0$

বা, $y^2-6y+y-6=0$

বা, $y(y-6)+1(y-6)=0$

বা, $(y-6)(y+1)=0$

হয়, $y-6=0$

বা, $y=6$

অথবা, $y+1=0$

বা, $y=-1$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y=-1, 6$

১২। $(y+5)(y-5)=24$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(y+5)(y-5)=24$

বা, $y^2-5^2=24$

বা, $y^2-25=24$

বা, $y^2=24+25$

বা, $y^2=49$

বা, $y \pm \sqrt{49}$

$\therefore y=\pm 7$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y=\pm 7$

১৩। $2(z^2-9)+9z=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $2(z^2-9)+9z=0$

বা, $2z^2-18+9z=0$

বা, $2z^2+12z-3z-18=0$

বা, $2z(z+6)-3(z+6)=0$

বা, $(z+6)(2z-3)=0$

হয়, $z+6=0$ অথবা, $2z-3=0$

বা, $z=-6$ বা, $2z=3$

$\therefore z=\frac{3}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z=6, \frac{3}{2}$

১৪। $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

বা, $\frac{3(5z-1)+4(2z+1)}{(2z+1)(5z-1)}=2$

বা, $\frac{15z-3+8z+4}{10z^2-2z+5z-1}=2$

বা, $\frac{23z+1}{10z^2+3z-1}=2$

বা, $23z+1=2(10z^2+3z-1)$

বা, $23z+1=20z^2+6z-2$

বা, $20z^2+6z-2-23z-1=0$

বা, $20z^2-17z-3=0$

বা, $20z^2-20z+3z-3=0$

বা, $20z(z-1)+3(z-1)=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(z-1)(20z+3)=0$

হয় $z-1=0$ অথবা, $20z+3=0$

বা, $z=1$ বা, $20z=-3$

$\therefore z=\frac{-3}{20}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান $z=1, \frac{-3}{20}$

১৫। $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

বা, $\frac{4+(\sqrt{10x-4})^2}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{4+10x-4}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{10x}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $10x=5\sqrt{10x-4}$

বা, $2x=\sqrt{10x-4}$

বা, $(2x)^2=(\sqrt{10x-4})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2=10x-4$

বা, $\frac{4x^2}{2}=\frac{10x-4}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2x^2=\frac{2(5x-2)}{2}$

বা, $2x^2=5x-2$

বা, $2x^2-5x+2=0$

বা, $2x^2-4x-x+2=0$

বা, $2x(x-2)-1(x-2)=0$

বা, $(x-2)(2x-1)=0$

দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের মান শূন্য হলে এদের অন্তত একটি শূন্য হয়।

$\therefore$ হয়, $x-2=0$ অথবা, $2x-1=0$

$\therefore$ $x=2$ বা, $2x=1$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=2, \frac{1}{2}$ (Ans.)

১৬। $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$

বা, $(x-2)\left\{\frac{1}{x+2}+\frac{6}{x-6}\right\}=1$

বা, $(x-2)\left\{\frac{1(x-6)+6(x+2)}{(x+2)(x-6)}\right\}=1$

বা, $(x-2)\frac{(x-6+6x+12)}{(x+2)(x-6)}=1$

বা, $\frac{(x-2)(7x+6)}{(x+2)(x-6)}=1$

বা, $(x-2)(7x+6)=(x+2)(x-6)$

বা, $7x^2-14x+6x-12=x^2+2x-6x-12$

বা, $7x^2-8x-12=x^2-4x-12$

বা, $7x^2-8x-12-x^2+4x+12=0$

বা, $6x^2-4x=0$

বা, $2x(3x-2)=0$

বা, $x(3x-2)=0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ হয়, $x=0$ অথবা, $3x-2=0$

বা, $3x=2$

$\therefore$ $x=\frac{2}{3}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=0, \frac{2}{3}$

১৭। $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

বা, $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{b}{x}-\frac{a}{x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{bx-ax}{ab}=\frac{b-a}{x}$

বা, $\frac{x(b-a)}{ab}=\frac{(b-a)}{x}$

বা, $x^2(b-a)=ab(b-a)$

বা, $x^2=\frac{ab(b-a)}{(b-a)}$

বা, $x^2=ab$

বা, $x=\pm\sqrt{ab}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $x=\pm\sqrt{ab}$

১৮। $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

সমাধান : $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

বা, $\frac{x-a}{x-b}-\frac{b}{a}+\frac{x-b}{x-a}-\frac{a}{b}=0$

বা, $\frac{a(x-a)-b(x-b)}{a(x-b)}+\frac{b(x-b)-a(x-a)}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{ax-a^2-bx+b^2}{a(x-b)}+\frac{bx-b^2-ax+a^2}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{(ax-a^2-bx+b^2)}{a(x-b)}+\frac{-(ax-a^2-bx+b^2)}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{ax-a^2-bx+b^2}{a(x-b)}-\frac{ax-a^2-bx+b^2}{b(x-a)}=0$

বা, $(ax-a^2-bx+b^2)\left\{\frac{1}{a(x-b)}-\frac{1}{b(x-a)}\right\}=0$

অথবা, $\frac{1}{ax-ab}-\frac{1}{bx-ab}=0$

বা, $\frac{1}{ax-ab}=\frac{1}{bx-ab}$

বা, $ax-ab=bx-ab$

বা, $ax-bx=ab-ab$

বা, $ax-bx=ab-ab$

বা, $x(a-b)=0$

বা, $x=\frac{0}{a-b}$

বা, $x=0$

$\therefore$ হয়, $ax-a^2-bx+b^2=0$

বা, $ax-bx=a^2-b^2$

বা, $x(a-b)=(a+b)(a-b)$

$\therefore x=a+b$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : 0, (a + b)

সমাধান সেট নির্ণয় কর : (১৯ – ২৫)

১৯। $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

বা, $\frac{3(x+1)+4x}{x(x+1)}=2$

বা, $\frac{3x+3+4x}{x^2+x}=2$ [আড়গুণন করে]

বা, $2x^2+2x=7x+3$

বা, $2x^2+2x-7x-3=0$

বা, $2x^2-5x-3=0$

বা, $2x^2-6x+x-3=0$

বা, $2x(x-3)+1(x-3)=0$

বা, $(x-3)(2x+1)=0$

হয় $x-3=0$ অথবা $2x+1=0$

$\therefore x=3$ বা $2x=-1$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট : $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$

২০। $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

বা, $\frac{(x+7)(2x+1)+(2x+6)(x+1)}{(x+1)(2x+1)}=5$

বা, $5(x+1)(2x+1)=(x+7)(2x+1)+(2x+6)(x+1)$

বা, $5(2x^2+x+2x+1)=2x^2+x+14x+7+2x^2+2x+6x+6$

বা, $10x^2+5x+10x+5=4x^2+23x+13$

বা, $10x^2+15x+5-4x^2-23x-13=0$

বা, $6x^2-8x-8=0$

বা, $3x^2-4x-4=0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3x^2-6x+2x-4=0$

বা, $3x(x-2)+2(x-2)=0$

বা, $(3x+2)(x-2)=0$

∴ হয় $3x+2=0$ অথবা, $x-2=0$

বা, $3x=-2$ ∴ $x=2$

∴ $x=-\frac{2}{3}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$ (Ans.)

২১। $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

বা, $\frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)}=\frac{b+a}{ab}$

বা, $\frac{x-a-b-x}{ax+bx+x^2}=\frac{a+b}{ab}$

বা, $\frac{-(a+b)}{ax+bx+x^2}=\frac{(a+b)}{ab}$

বা, $\frac{-1}{ax+bx+x^2}=\frac{1}{ab}$

বা, $ax+bx+x^2=-ab$

বা, $x^2+ax+bx+ab=0$

বা, $x(x+a)+b(x+a)=0$

বা, $(x+a)(x+b)=0$

∴ হয়, $x+a=0$ অথবা, $x+b=0$

∴ $x=-a$ ∴ $x=-b$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{-a,-b\}$

২২। $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$

বা, $(ax+b)(c+dx)=(cx+d)(a+bx)$

বা, $acx+adx^2+bc+bdx=acx+bcx^2+ad+bdx$

বা, $adx^2+acx+bc+bdx-acx-bcx^2-ad-bdx=0$

বা, $adx^2-bcx^2-ad+bc=0$

বা, $x^2(ad-bc)-1(ad-bc)=0$

বা, $(ad-bc)(x^2-1)=0$

বা, $x^2-1=0$ [উভয় পক্ষকে $(ad-bc)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2=1$

∴ $x=\pm 1$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{1,-1\}$

২৩। $x+\frac{1}{x}=2$

সমাধান : দেয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=2$

বা, $\frac{x^2+1}{x}=2$

বা, $x^2+1=2x$

বা, $x^2-2x+1=0$

বা, $(x-1)^2=0$

বা, $x-1=0$

∴ $x=1$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{1\}$

২৪। $2x^2-4ax=0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $2x^2-4ax=0$

বা, $2x(x-2a)=0$

∴ হয়, $2x=0$ অথবা, $x-2a=0$

∴ $x=0$ ∴ $x=2a$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{0, 2a\}$

২৫। $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)}{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}=2$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1}=2$

বা, $\frac{6x^2+2}{4x}=2$

বা, $6x^2+2=8x$

বা, $6x^2-8x+2=0$

বা, $3x^2-4x+1=0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3x^2-3x-x+1=0$

বা, $3x(x-1)-1(x-1)=0$

বা, $(3x-1)(x-1)=0$

দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের মান শূন্য হলে এদের অন্তত একটি শূন্য হয়।

হয়, $3x-1=0$ অথবা, $x-1=0$

বা, $3x=1$ ∴ $x=1$

∴ $x=\frac{1}{3}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২৬ – ৩১)

২৬। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক $= x$

এবং, এর দশক স্থানীয় অঙ্ক $= 15-x$

∴ সংখ্যাটি $= x+10(15-x)$

$= x+150-10x$

$= 150-9x$

প্রশ্নমতে, $x(15-x)=56$

বা, $15x - x^2 = 56$
বা, $x^2 - 15x + 56 = 0$
[(–) দ্বারা গুণ করে পক্ষান্তর করা হলো]
বা, $x^2 - 8x - 7x + 56 = 0$
বা, $x(x-8) - 7(x-8) = 0$
বা, $(x-8)(x-7) = 0$
বা, $x - 8 = 0$ অথবা $x - 7 = 0$
$\therefore x = 8$ $\therefore x = 7$
$x = 8$ হলে সংখ্যাটি $= 150 - 9 \times 8$
$= 150 - 72$
$= 78$
আবার, $x = 7$ হলে সংখ্যাটি $= 150 - 9 \times 7$
$= 150 - 63$
$= 87$
অতএব নির্ণেয় সমাধান 78 বা 87

২৭। একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার কক্ষের প্রস্থ = x মিটার
তাহলে, দৈর্ঘ্য $= \frac{192}{x}$ মিটার
দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য $= \left(\frac{192}{x} - 4\right)$ মিটার
এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে প্রস্থ $= (x + 4)$ মিটার
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{192}{x} - 4\right)(x+4) = \left(\frac{192 - 4x}{x}\right)(x+4)$
$= \frac{192x - 4x^2 + 768 - 16x}{x}$
$= \frac{176x - 4x^2 + 768}{x}$ বর্গ মিটার
প্রশ্নমতে, $\frac{176x - 4x^2 + 768}{x} = 192$
বা, $176x - 4x^2 + 768 = 192x$
বা, $4x^2 + 192x - 176x = 768$
বা, $4x^2 + 16x - 768 = 0$
বা, $4(x^2 + 4x - 192) = 0$
বা, $x^2 + 4x - 192 = 0$
বা, $x^2 + 16x - 12x - 192 = 0$
বা, $x(x+16) - 12(x+16) = 0$
বা, $(x-12)(x+16) = 0$
হয়, $(x - 12) = 0$
$\therefore x = 12$
অথবা, $(x + 16) = 0$
$\therefore x = -16$
কিন্তু প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না।
সুতরাং –16 গ্রহণযোগ্য নয়।
অতএব, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= \frac{192}{x} = \frac{192}{12} = 16$ মিটার
$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার

২৮। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে. মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি, ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = x সে. মি.
অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = (x + 3) সে. মি.
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,
বা, $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$
বা, $x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$
বা, $2x^2 + 6x + 9 = 225$
বা, $2x^2 + 6x + 9 - 225 = 0$
বা, $2x^2 + 6x - 216 = 0$
বা, $x^2 + 3x - 108 = 0$
বা, $x^2 + 12x - 9x - 108 = 0$
বা, $x(x+12) - 9(x+12) = 0$
বা, $(x+12)(x-9) = 0$
$\therefore x + 12 = 0$ অথবা $x - 9 = 0$
$\therefore x = -12$ অথবা $x = 9$
যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 সে.মি. এবং
অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = (9 + 3) সে. মি. = 12 সে. মি.

২৯। একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে. মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে এর উচ্চতা কত?

সমাধান :
মনেকরি, ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের উচ্চতা = x সে.মি.
$\therefore$ ভূমি = (2x + 6) সে.মি.
আমরা জানি,
ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times (2x+6) \times x = 810$
বা, $\frac{1}{2} \times 2(x+3) \times x = 810$
বা, $(x+3)x = 810$
বা, $x^2 + 3x = 810$
বা, $x^2 + 3x - 810 = 0$
বা, $x^2 + 30x - 27x - 810 = 0$
বা, $x(x+30) - 27(x+30) = 0$
বা, $(x+30)(x-27) = 0$
$\therefore$ হয়, $x + 30 = 0$
বা, $x = -30$
উচ্চতা কখনও ঋনাত্মক হতে পারেনা
$\therefore x = -30$ গ্রহণযোগ্য নয়।
অথবা, $x - 27 = 0$
$\therefore x = 27$
অতএব, ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের নির্ণেয় উচ্চতা = 27 সে.মি.

৩০। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল?

সমাধান: মনে করি,
শ্রেণিতে ছাত্র/ছাত্রীর সংখ্যা x জন
এবং সহপাঠীর সংখ্যা $x - 1$ জন
∴ প্রত্যেকে চাঁদা দেয় $(x - 1)$ টাকা
প্রশ্নমতে, $x(x - 1) = 420$
বা, $x^2 - x = 420$
বা, $x^2 - x - 420 = 0$
বা, $x^2 - 21x + 20x - 420 = 0$
বা, $x(x - 21) + 20(x - 21) = 0$
বা, $(x - 21)(x + 20) = 0$
হয় $x - 21 = 0$ অথবা, $x + 20 = 0$
∴ $x = 21$ ∴ $x = -20$ গ্রহণযোগ্য নয়
[কারণ ছাত্র/ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।]
∴ প্রত্যেকে চাঁদা দেয় $(21 - 1) = 20$ টাকা
অতএব ঐ শ্রেণিতে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 21 জন এবং প্রত্যেকে টাকা দেয় 20 টাকা। (Ans.)

৩১। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণি ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত ?

সমাধান: মনে করি, ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = x
প্রত্যেকে চাঁদা দেয় $(x + 30)$ পয়সা
∴ মোট চাঁদা = $x(x + 30)$ পয়সা
দেয়া আছে, মোট উঠানো চাঁদা = 70 টাকা = 7000 পয়সা
প্রশ্নমতে, $x(x + 30) = 7000$
বা, $x^2 + 30x = 7000$
বা, $x^2 + 30x - 7000 = 0$
বা, $x^2 + 100x - 70x - 7000 = 0$
বা, $x(x + 100) - 70(x + 100) = 0$
বা, $(x + 100)(x - 70) = 0$
হয় $(x - 70)$ অথবা $x + 100 = 0$
∴ $x = 70$ ∴ $x = -100$
যেহেতু ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।
সুতরাং, $x = -100$ গ্রহণযোগ্য নয়।
∴ $x = 70$
অতএব, নির্ণেয় ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 70 জন

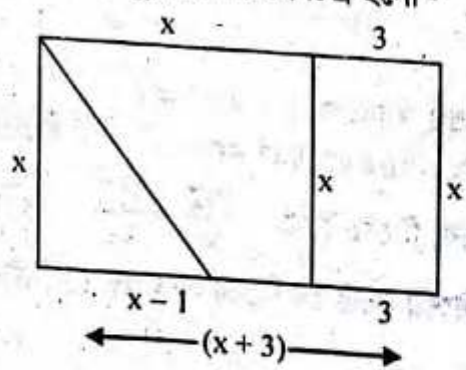
৩২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।
ক) চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।
খ) সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
ক) মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক = x
তাহলে এর দশক স্থানীয় অঙ্ক = $7 - x$
∴ সংখ্যাটি হলো $= x + 10(7 - x)$
$= x + 70 - 10x$
$= 70 - 9x$
এবং স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি হলো $= 10x + 7 - x$
$= 9x + 7$

খ) প্রশ্নমতে, $9x + 7 = 70 - 9x + 9$
বা, $9x + 7 = 79 - 9x$
বা, $9x + 9x = 79 - 7$
বা, $18x = 72$
বা, $x = \frac{72}{18}$ (4)
∴ $x = 4$
∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 70 - 9x$
$= 70 - 9.4$
$= 70 - 36$
$= 34$

গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় হলো 3,4
তাহলে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি.
এবং প্রস্থ b = 3 সে.মি.
সুতরাং আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$
$= \sqrt{16 \times 9}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$
বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 5 সে.মি.
∴ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times$ এক বাহুর দৈর্ঘ্য
$= \sqrt{2} \times 5$
$= 5\sqrt{2}$
অতএব আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $5\sqrt{2}$ সে.মি.

৩৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x - 1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $(x + 3)$ সে.মি. ও প্রস্থ x সে.মি.।
ক) একটি মাত্রচিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।
খ) ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?
গ) ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

সমাধান:
ক) চিত্রের তথ্যগুলোর মাধ্যমে চিত্র হলো–

খ) দেওয়া আছে,
ত্রিভুজের ভূমি $(x - 1)$ সে.মি.
এবং উচ্চতা x সে.মি.
আরা জানি,
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
$= \frac{1}{2} \times (x - 1) \times x$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{x^2 - x}{2}$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নমতে,
$\frac{x^2 - x}{2} = 10$
বা, $x^2 - x = 20$
বা, $x^2 - x - 20 = 0$
বা, $x^2 - 5x + 4x - 20 = 0$
বা, $x(x - 5) + 4(x - 5) = 0$
বা, $(x - 5)(x + 4) = 0$
হয় $x - 5 = 0$ অথবা, $x + 4 = 0$
$\therefore x = 5$ $\therefore x = -4$ [গ্রহণযোগ্য নয়]
কারণ ত্রিভুজের উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না।
অতএব ত্রিভুজটি উচ্চতা 5 সে.মি. (Ans.)

গ) 'খ' থেকে পাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
$= \frac{x^2 - x}{2}$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{5^2 - 5}{2}$ " "
$= \frac{25 - 5}{2}$ " "
$= \frac{20}{2}$ " "
$= 10$ বর্গ সে.মি.
আমরা জানি, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ একক
$= 5^2$ বর্গ সে.মি.
$= 25$ বর্গ সে.মি.
আবার, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) = বর্গ একক
$= \{(x + 3) \times x\}$ বর্গ সে.মি.
$= \{(5 + 3) \times 5\}$ বর্গ সে.মি. [x এর মান বসিয়ে]
$= (8 \times 5)$ " "
$= 40$ বর্গ কি.মি.
$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ধারাবাহিক অনুপাত $= 10 : 25 : 40$
$= 2 : 5 : 8$
অতএব অনুপাত $2 : 5 : 8$ (Ans.)

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১ নিচের কোনটি বিচ্ছিন্ন চলক?
[ভিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক বয়স খ উচ্চতা
গ প্রাপ্ত নম্বর ঘ ওজন (গ)

২ $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} = a^2 - b^2$ সমীকরণে x এর মান নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক $\frac{a}{b}$ খ $\frac{b}{a}$
গ ab ঘ ϕ (গ)

৩ $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক -7 খ -3
গ 1 ঘ 4 (গ)

৪ $x + 3y = 6$ সমীকরণে চলকের সংখ্যা নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক একটি খ দুইটি
গ তিনটি ঘ চার[illegible] (খ)

৫ $\sqrt{2x - 3} + 5 = 2$ এর সমা[illegible] কর[illegible]
[ইনজিনিয়ারিং ইউ[illegible] স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক {ϕ} খ $\{\sqrt{5}\}$
গ $\{0, \sqrt{5}\}$ ঘ $\{0, 5\}$ (ক)

৬ সমাধান সেট নির্ণয় কর– $\sqrt{2x - 3} + 5 = 2$
[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $\{-3\}$ খ $\{3\}$
গ $\{\}$ ঘ $\{6\}$ (গ)

৭ এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি?
[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $2x - 1 = x$ খ $\frac{3x}{2} = 1 - \frac{x}{3}$
গ $2x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ ঘ $2x - 1 = \frac{1}{x}$ (ঘ)

৮ $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?
[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $-3, -4$ খ $-3, 4$
গ $3, -4$ ঘ $3, 4$ (খ)

৯ নিচের কোনটি অভেদ?
[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 4x$
খ $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2(x^2 + 1)$
গ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 2ab$
ঘ $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (খ)

১০ $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?
[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক 0 খ 2
গ 1 ঘ 3 (খ)

১১ [illegible] সমাধান নিচের কোনটি?
[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক a খ b
গ $-a$ ঘ $-c$ (খ)

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

ব্যুৎপত্তিগতভাবে 'জ্যামিতি' বা 'Geometry' শব্দের অর্থ "ভূমি পরিমাপ"। কৃষি ভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ও ব্যাখ্যাদানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য।

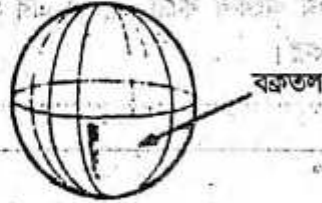
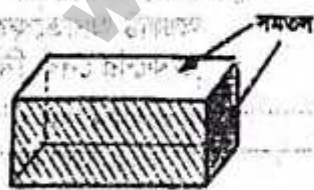
জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পন্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ "Elements" রচনা করেন। তেরো খন্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই "Elements" গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ।

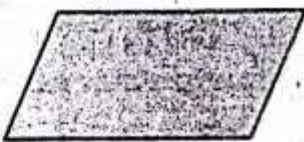
অনুশীলনী- ৬.১

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৬.১

১। স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

সমাধান : স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। এগুলো জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা মাত্র। যেমন :

- **স্থান :** আমাদের চারপাশে ছোট বড় বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান ধারণার উদ্ভব।
- **তল :** ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের অংশ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতলকে সমতল ও গোলকের উপরিতলকে বক্রতল বলে।

চিত্র : ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণা

- **রেখা :** দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠ–তল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা উৎপন্ন হয়। রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নেই।

চিত্র : তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণা

- **বিন্দু :** দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়, অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার–রেখা বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।
  বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নেই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু মাত্র অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা বলে গণ্য করা হয়।

২। ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য হলো—

স্বীকার্য ১। একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

স্বীকার্য ২। খন্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩। যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪। সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫। একটি সরলরেখা দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে সেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

৩। পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : আপতন স্বীকার্য : বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। এ সংক্রান্ত ৫টি স্বীকার্যকে আপতন স্বীকার্য বলে।

স্বীকার্য–১ : স্থান সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন : কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে 'বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত' অথবা, 'সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়' অথবা অনুরূপ অর্থবহ বাক্য দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে 'সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত' অথবা 'সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায়' এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য–২। দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য–৩। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য–৪। কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য–৫। ক) স্থানে একাধিক সমতল বিদ্যমান।

খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।

গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

৪। দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : দূরত্ব স্বীকার্য : স্বীকার্য–৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য বলা হয়। জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

ক) বিন্দুযুগল (P, Q) একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে যাকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধণাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$।

গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$।

$PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

৫। রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : রুলার স্বীকার্য : স্বীকার্য–৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এমনভাবে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। এই স্বীকার্যকে রুলার স্বীকার্য বলা হয়।

৬। সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

সমাধান : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যাসেটের মধ্যে এমনভাবে এক এক মিল স্থাপন করা যায়, যেমন, রেখাটির মিলকরণের ফলে P, Q এর জন্যে $PQ = |a-b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এভাবে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P ও a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়।

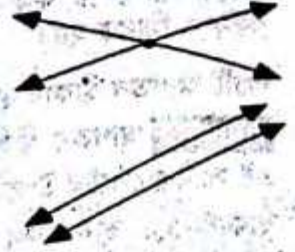
৭। রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : রুলার স্থাপন স্বীকার্য : কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য : যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক O এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়। একে রুলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।

৮। পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

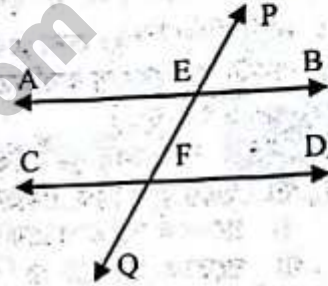
সমাধান : পরস্পরচ্ছেদী রেখা : দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরচ্ছেদী বলা হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।

সমান্তরাল রেখা : একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে।

অনুশীলনী- ৬.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–১: সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞার সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ কর। [পৃষ্ঠা– ১১২]

সমাধান : সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞা : দুইটি সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন প্রত্যেক একান্তর কোণ জোড়া সমান হবে।

মনে করি, AB ∥ CD এবং PQ ছেদক তাদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AEF = একান্তর ∠EFD

প্রমাণ :

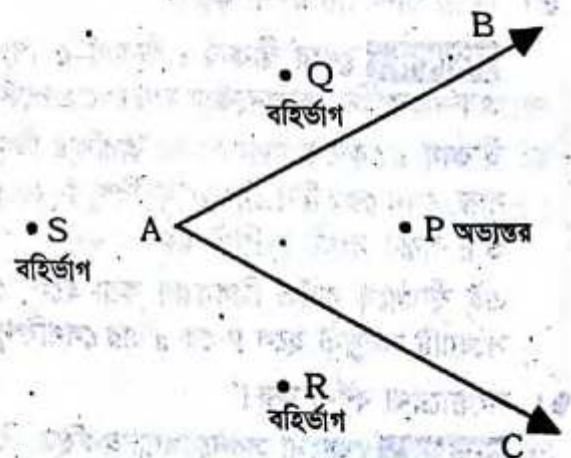
ধাপসমূহ	যথার্থতা
∠PEB = অনুরূপ ∠EFD	[সমান্তরাল রেখার সংজ্ঞানুসারে অনুরূপ কোণ সমান]
∠PEB = বিপ্রতীপ ∠AEF	[বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
∠AEF = ∠EFD (প্রমাণিত)	[১নং ও ২নং থেকে]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৬.২

১। কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

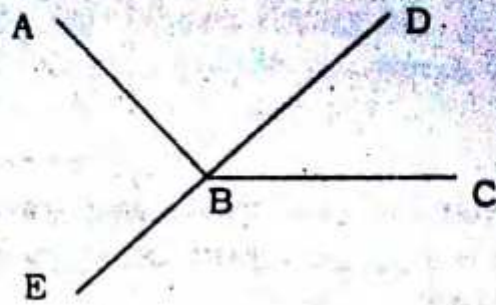
সমাধান : কোণের অভ্যন্তর : ∠BAC এর অভ্যন্তর হলো $\overleftrightarrow{AB}$ এর C পার্শ্বে এবং $\overleftrightarrow{AC}$ এর B পার্শ্বে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেট।

কোণের বহির্ভাগ : কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় সমতলস্থ এমন সকল বিন্দুর সেটকে তার বহির্ভাগ বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

অর্থাৎ চিত্রে, P বিন্দু ∠BAC এর অভ্যন্তরে এবং Q, S ও R বিন্দুগুলো তার বহির্ভাগে অবস্থিত।

২। যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

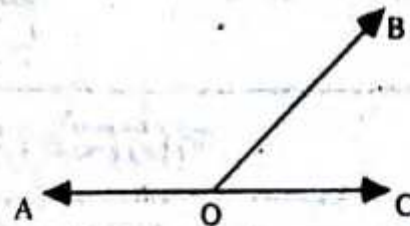
সমাধান : চিত্রে উৎপন্ন কোণগুলোর নাম যথাক্রমে : ∠DBE, ∠ABD, ∠DBC, ∠CBE, ∠EBC, ∠ABE.

উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ :

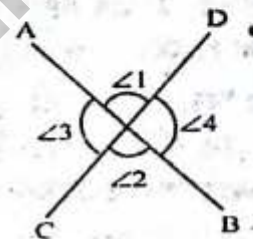
$\angle DBE$ = সরলকোণ
$\angle ABD$ = সমকোণ
$\angle DBC$ = সূক্ষ্মকোণ
$\angle CBE$ = স্থূলকোণ
$\angle EBC$ = প্রবৃদ্ধ কোণ
$\angle ABE$ = সমকোণ।

৩। সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

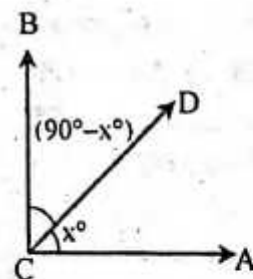
সমাধান : সন্নিহিত কোণ : সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি (১) একই শীর্ষবিন্দু থাকে, (২) একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং (৩) তাদের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণ বলা হয়।

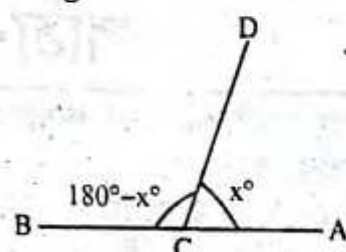
চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ একে অপরের সন্নিহিত কোণ।

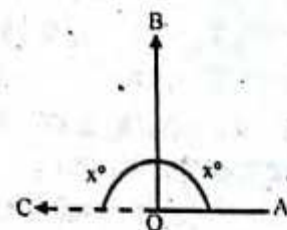
বহিঃস্থ বাহু : সাধারণ বাহু ব্যতীত সন্নিহিত কোণ দুটির অপর দুই বাহুকে তাদের বহিঃস্থ বাহু বলা হয়। চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O, একটি সাধারণ বাহু $\overrightarrow{OB}$ এবং কোণদ্বয়ের অভ্যন্তরের কোনো সাধারণ বিন্দু নাই। $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।

৪। চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও : বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

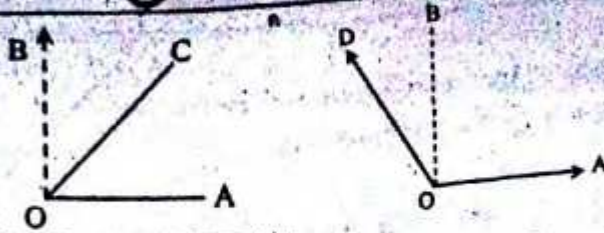
সমাধান : বিপ্রতীপ কোণ : কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।

চিত্রে $\angle 1$ এবং $\angle 3$ একযুগল বিপ্রতীপ কোণ যা AB এবং CD এর ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়েছে। একইভাবে চিত্রে $\angle 2$ এবং $\angle 4$ আরেক যুগল বিপ্রতীপ কোণ একই সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন।

পূরককোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি এক সমকোণ হলে কোণ দুইটিকে পরস্পরের পূরককোণ বলা হয়।

চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ পূরককোণ।

সম্পূরক কোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলা হয়।

চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ সম্পূরক কোণ।

সমকোণ : একটি সরল কোণের সমদ্বিখণ্ডককে লম্ব এবং সংশ্লিষ্ট সন্নিহিত কোণের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে।

চিত্রে, $\angle AOB$ সমকোণ।

উল্লেখ যে, দুইটি কোণ সমান অর্থ তাদের ডিগ্রি পরিমাপ সমান। লক্ষণীয় যে, ওপরের চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ রৈখিক যুগল কোণ এবং কোণ যোজন স্বীকার্য অনুযায়ী $\angle AOB + \angle BOC$ = সরলকোণ AOC। সুতরাং $\angle AOB = x$ হলে সরলকোণ স্বীকার্য। $x + x = 180°$ বা, $x = 90°$। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, সমকোণের ডিগ্রি পরিমাণ 90°। $\angle AOB$ যে সমকোণ তা পাশের চিত্রের মতো চিহ্নিত করা হয়। এই চিত্রে, OA ও OB পরস্পর লম্ব। (প্রতীক : $OA \perp OB$).

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ : এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।

ওপরের চিত্রে, ∠AOC সূক্ষ্মকোণ এবং ∠AOD স্থূলকোণ।
উল্লেখ্য যে, ∠AOC < ∠AOB এবং AOD > ∠AOB দ্বারা কোণগুলোর ডিগ্রি পরিমাপের তুলনাই বোঝায় এবং ∠AOB – এক সমকোণ।

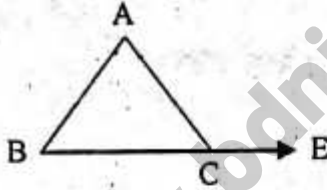
অনুশীলনী- ৬.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–১: প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা তার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। [পৃষ্ঠা– ১১৪]

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

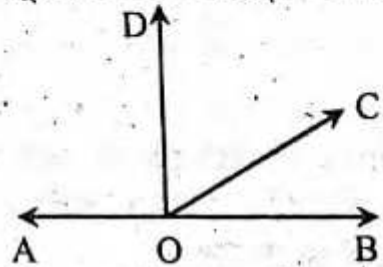
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা বহিঃস্থ ∠ACE উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ ∠ACE এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয় হলো ∠BAC এবং ∠ABC।

প্রমাণ করতে হবে যে, বহিঃস্থ ∠ACE > অন্তঃস্থ বিপরীত ∠BAC এবং বহিঃস্থ ∠ACE > অন্তঃস্থ বিপরীত ∠ABC

প্রমাণ :	যথার্থতা
ΔABC –এর ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 2 সমকোণ ..... (i)	[∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]
আবার, AC রশ্মির প্রান্তবিন্দু C তে, অপর একটি সরলরেখা BE মিলিত হয়েছে। ফলে ∠ACB এবং ∠ACE সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে। ∴ ∠ACB + ∠ACE = 2 সমকোণ .... (ii)	
(i) নং এবং (ii) নং তুলনা করে পাই, ∠ACB + ∠ACE = ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC বা, ∠ACE = ∠ABC + ∠BAC ∴ স্পষ্টত ∠ACE > ∠ABC এবং ∠ACE > ∠BAC (প্রমাণিত)	[উভয় পক্ষ থেকে ∠ACB বাদ দিয়ে]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৬.৩

১। নিম্নে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব?
ক) ৫ সে.মি. ৬ সে. মি. ও ৭ সে.মি
খ) ৩ সে.মি. ৪ সে. মি. ও ৭ সে.মি
গ) ৫ সে.মি. ৭ সে. মি. ও ১৪ সে.মি
ঘ) ২ সে.মি. ৪ সে. মি. ও ৮ সে.মি
উত্তর : ক) ৫ সে.মি. ৬ সে. মি. ও ৭ সে.মি।

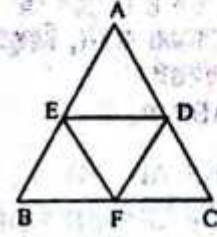
২. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :
i. যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমকোণ তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে
ii. যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সূক্ষ্মকোণ তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।
iii. যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii
উত্তর : গ. ii ও iii.

৩। প্রদত্ত চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

এক সমকোণের সমান কোণ কোণটি?
ক ∠BOC খ ∠BOD
গ ∠COD ঘ ∠AOD
বি. দ্র. : খ ও ঘ উভয়ই সঠিক কারণ চিত্রানুসারে ∠AOD ও ∠BOD উভয়ই এক সমকোণ

৪। ∠BOC এর পূরক কোণ কোনটি?
ক ∠AOC খ ∠BOD
গ ∠COD ঘ ∠AOD
উত্তর : গ. ∠COD

৫। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। অর্থাৎ, AB = BC = AC। F, D ও E যথাক্রমে BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু। মধ্যবিন্দু তিনটি যোগ করায় DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।

প্রমাণ : ΔBEF ও ΔCDF এর মধ্যে

BE = CD [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]

BF = CF [∵ F, BC এর মধ্যবিন্দু]

এবং অন্তর্ভুক্ত ∠B = অন্তর্ভুক্ত ∠C [∵ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান]

∴ Δ BEF ≅ ΔCDF

অতএব, EF = FD

আবার, ΔCDF ও ΔAED এর মধ্যে CD = AD, [∵ D, AC- এর মধ্যবিন্দু]

AE = CF [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]

এবং অন্তর্ভুক্ত ∠C = অন্তর্ভুক্ত ∠A

∴ ΔCDF ≅ ΔAED

∴ FD = ED

সুতরাং, EF = FD = ED

∴ ΔDEF সমবাহু (প্রমাণিত)

৬। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BE ও CF যথাক্রমে Δ ABC এর BC, CA এবং AB এর তিনটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD = BE = CF.

প্রমাণ : ΔBCE ও Δ BCF দ্বয়ের মধ্যে, CE = BF

[E এবং F সমান বাহুর মধ্যবিন্দু বলে]

BC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

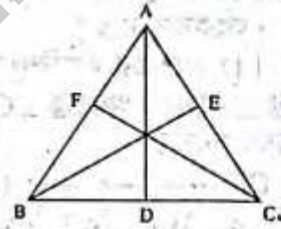
এবং অন্তর্ভুক্ত ∠BCE = অন্তর্ভুক্ত ∠CBF [∵ AB = AC]

∴ ΔBCE ≅ ΔBCF

∴ BE = CF

অনুরূপভাবে, ABD ও ABE ত্রিভুজ নিয়ে দেখানো যায় যে, AD = BE

∴ AD = BE = CF.

অর্থাৎ, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান। (প্রমাণিত)

। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এর BC বাহুকে D এবং E পর্যন্ত উভয় দিকে বর্ধিত করা হলো। এর ফলে ∠ABD ও ∠ACE বহিঃস্থ কোণ দুটি উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠ABD + ∠ACE > ২ সমকোণ।

প্রমাণ : বহিঃস্থ ∠ABD = অন্তঃস্থ (∠BAC + ∠ACB)

এবং বহিঃস্থ ∠ACE = অন্তঃস্থ (∠BAC + ∠ABC)

∴ ∠ABD + ∠ACE = ∠BAC + ∠ACB + ∠BAC + ∠ABC

= ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC

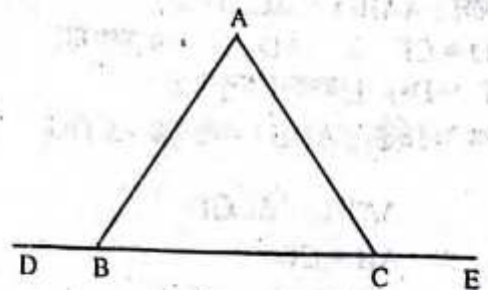
= দুই সমকোণ + ∠BAC

[∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = ২ সমকোণ]

অর্থাৎ, বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর

∴ (∠ABD + ∠ACE) > দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

ΔABC এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AB + AC > BD + DC.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : Δ ABC এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, AB + AC > BD + DC.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে D যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > BD + DC$.

অংকন : B, D এবং C, D যোগ করি। BD কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, এটি AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

∴ ΔABE এ,

$AB + AE > BE$

বা, $AB + AE > BD + DE$ ---------(i)

অনুরূপভাবে, ΔCDE-এ,

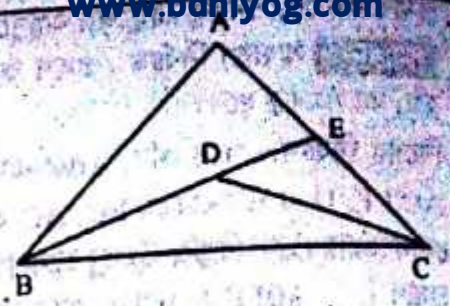
$DE + EC > CD$----------------- (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB + AE + DE + EC > BD + DE + CD$

বা, $AB + AE + EC > BD + CD$. [উভয় পক্ষ থেকে DE বাদ দিয়ে]

বা, $AB + AC > BD + CD$ [∵ $AE + EC = AC$]

∴ $AB + AC > BD + DC$. (প্রমাণিত)

৯। ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC এর BC বাহুর মধ্য বিন্দু D হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$.

অংকন : A, D যোগ করি এবং AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = DE$ হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCDE এর মধ্যে,

$AD = DE$ [অংকনানুসারে]

$BD = CD$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

∴ $AB = CE$ ------------------- (i)

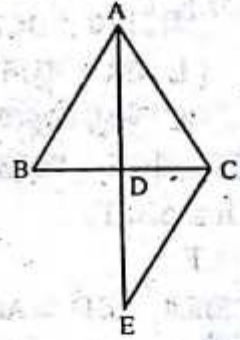
এখন ΔACE এ, $AC + CE > AE$,

[∵ ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $AC + CE > AD + DE$ [অংকনানুসারে]

বা, $AC + AB > AD + DE$ [(i) নং এর সাহায্যে]

বা, $AC + AB > AD + AD$ [∵ $DE = AD$]

∴ $AB + AC > 2AD$. (প্রমাণিত)

১০। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$.

অঙ্কন: A ও D যোগ করি। AD কে G পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, $DG = AD$ হয়। C, G যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCGD-এ,

$BD = CD$ [∵ AD, BC-এর মধ্যমা]

$AD = DG$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CDG$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

∴ $\Delta ABD \cong \Delta CGD$

∴ $AB = CG$

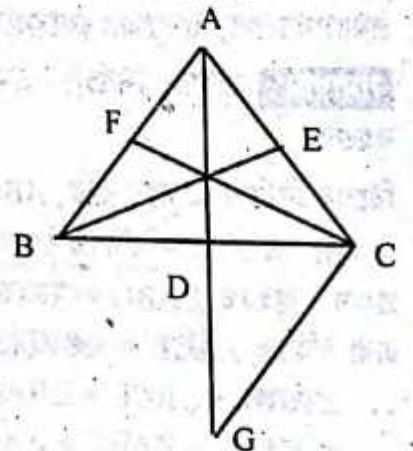
এখন, ΔACG-এ,

$AC + CG > AG$ [∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বা, $AC + AB > AD + DG$ [∵ $AB = CG$]

বা, $AB + AC > AD + AD$

∴ $AB + AC > 2AD$ ---------- (i)

অনুরূপভাবে, $AC + BC > 2CF$ ------ (ii)

এবং $BC + AB > 2BE$ ------- (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB + AC + AC + BC + BC + AB > 2AD + 2CF + 2BE$

বা, $2AB + 2BC + 2AC > 2AD + 2CF + 2BE$

$2(AB + BC + AC) > 2(AD + CF + BE)$

বা, $AB + BC + AC > AD + CF + BE$

$\therefore$ $AD + CF + BE < AB + BC + AC$

অর্থাৎ, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$. (প্রমাণিত)

১১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হলো, যেন $BA = AD$; প্রমাণ কর যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হলো, যেন $BA = AD$; প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল, যেন $BA = AD$;

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

প্রমাণ : $AB = AC$ [কল্পনানুসারে]

$\therefore$ $\angle ABC = \angle ACB$ ---------------------(i) [$\because$ সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]

আবার, ΔACD এ, $AC = AD$ [$\because BA = AC = AD$]

$\therefore$ $\angle ACD = \angle ADC$ -------------------(ii)

এখন ΔBCD এ, $\angle BCD + \angle DBC + \angle BDC = 2$ সমকোণ

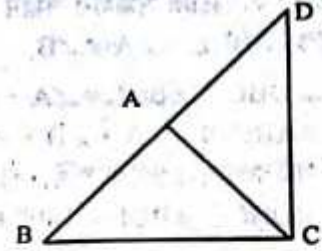
বা, $\angle BCD + \angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

বা, $\angle BCD + \angle ACB + \angle ACD = 2$ সমকোণ [(i) ও (ii) নং এর সাহায্যে]

বা, $\angle BCD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

বা, $2\angle BCD = 2$ সমকোণ

বা, $\angle BCD =$ এক সমকোণ

অতএব, $\angle BCD$ একটি সমকোণ। (প্রমাণিত)

১২। ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

প্রমাণ : ΔABC এ, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$ ....(i)

আবার, ΔBOC এ, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

কিন্তু $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$

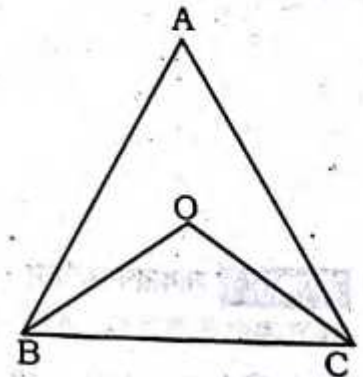
এবং $\angle OCB = \frac{1}{2}\angle C$

$\therefore$ $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180°$

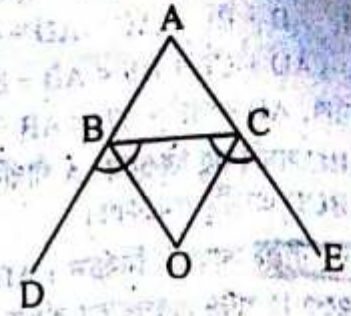
বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 180°$ [(i) এর সাহায্যে]

বা, $\angle BOC + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180°$

বা, $\angle BOC = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore$ $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. (প্রমাণিত)

১৩। ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করায় B ও C বিন্দুতে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle DBC$ ও $\angle BCE$। উক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণ : ΔABC এ, $\angle DBC = \angle A + \angle C$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলে]

অনুরূপে, $\angle BCE = \angle A + \angle B$

$\therefore$ $\angle DBC + \angle BCE = \angle A + \angle C + \angle A + \angle B$ ----- (i)

কিন্তু ΔABC এ, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ------------------------(ii)

$\therefore$ সমীকরণ (i) থেকে পাই, $\angle DBC + \angle BCE = \angle A + \angle B + \angle C + \angle A$

বা, $\angle DBC + \angle BCE = 180° + \angle A$ ---------------(iii) [(ii)-এর সাহায্যে]

এখন, ΔBOC এ, $\angle BOC + \angle CBO + \angle BCO = 180°$

কিন্তু $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle DBC$

এবং $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCE$

$\therefore$ $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle DBC + \frac{1}{2}\angle BCE = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle BCE) = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(180° + \angle A) = 180°$ [(iii)-এর সাহায্যে]

বা, $\angle BOC + 90° + \frac{1}{2}\angle A = 180°$

বা, $\angle BOC = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore$ $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. (প্রমাণিত)

১৪। চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$. প্রমাণ কর যে, AB = 2BC।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেয়া আছে $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$.
প্রমাণ করতে হবে যে, AB = 2BC।

বিশেষ নির্বচন, ΔABC- এর $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$. প্রমাণ করতে হবে যে, AB = 2BC

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বলে।]

বা, $\angle A + 2\angle A + 90° = 180°$ [$\because \angle B = 2\angle A$]

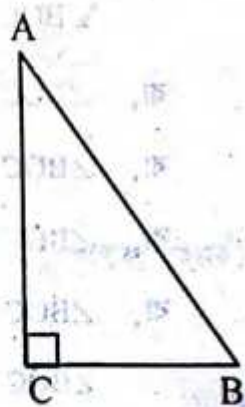
বা, $3\angle A = 180° — 90°$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3\angle A = 90°$

$\therefore$ $\angle A = 30°$

$\therefore$ $\angle B = 30° \times 2 = 60°$

বা, $\angle ABC = 60°$

ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos\angle ABC = \left[\frac{\text{ভূমি } BC}{\text{অতিভুজ } AB} = \cos\angle ABC\right]$

বা $\cos 60^\circ = \frac{BC}{AB}$

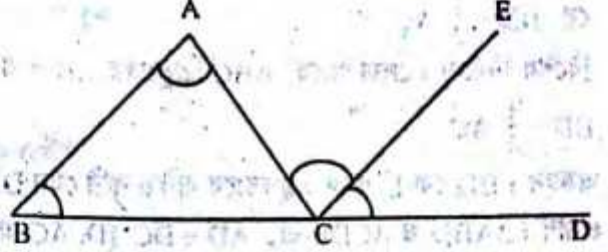
বা $\frac{1}{2} = \frac{BC}{AB}$

বা, $AB = 2BC$ [প্রমাণিত]

১৫। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, বহিঃস্থ $\angle ACD$ = অন্তঃস্থ $\angle ABC$ + অন্তঃস্থ $\angle BAC$.

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে BA এর সমান্তরাল CE অঙ্কন করি।

প্রমাণ : BA এবং CE সমান্তরাল, AC তাদের ছেদক,

$\therefore$ $\angle BAC = \angle ACE$ (একান্তর কোণ) .... (i)

আবার, BA ও CE সমান্তরাল এবং BCD তাদের ছেদক,

$\therefore$ $\angle ABC = \angle ECD$ (অনুরূপ কোণ) .... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle ACD$ = অন্তঃস্থ $\angle ABC$ + অন্তঃস্থ $\angle BAC$. (প্রমাণিত)

১৬। ΔABC এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF। যদি BE = CF হয়, তবে দেখাও যে, AB = AC.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF। যদি BE = CF হয়, তবে দেখাতে হবে যে, AB = AC.

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC একটি ত্রিভুজ। এর B ও C শীর্ষ থেকে AC ও AB এর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব এবং BE = CF. দেখাতে হবে যে, AB = AC.

প্রমাণ : $BE \perp AC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore$ $\angle BEC = 90^\circ$ এবং Δ BCE সমকোণী।

আবার, $CF \perp AB$ [দেওয়া আছে]

$\therefore$ $\angle CFB = 90^\circ$ এবং Δ BCF সমকোণী।

এখন, সমকোণী Δ BCF ও Δ BCE-এ

BE = CF [দেয়া আছে]

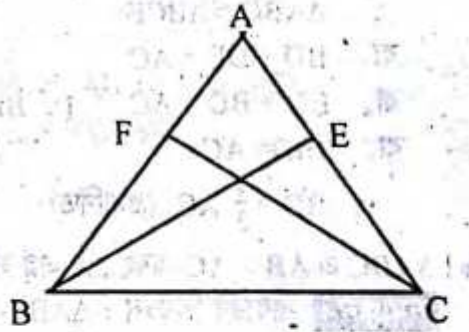
এবং BC উভয় ত্রিভুজের অতিভুজ।

$\therefore$ $\Delta BCF \cong \Delta BCE$

$\therefore$ $\angle BCE = \angle CBF$

অর্থাৎ Δ ABC-এর

$\angle BCA = \angle CBA$

$\therefore$ AB = AC. [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু সমান বলে] (দেখানো হলো)

১৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বৃহত্তম বাহু এবং তৃতীয় বাহু BC ক্ষুদ্রতম। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB - AC < BC$.

অর্থাৎ, প্রমাণ করতে হবে যে ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে, $AC + BC > AB$

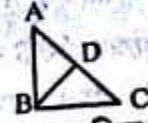
[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $AC + BC - AC > AB - AC$ [অসমতার উভয় দিক থেকে AC বিয়োগ করে]

বা, $BC > AB - AC$

বা, $AB - AC < BC$.

অতএব, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (প্রমাণিত)

১৮। চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2} AC$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2} AC$.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2} AC$.

অঙ্কন : BD কে E পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করি যেন $DE = BD$ হয়। C,E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCDE-এ, $AD = DC$ [D, AC-এর মধ্যবিন্দু]

$BD = DE$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CDE$

$\therefore AB = CE$ এবং $\angle DAB = \angle DCE$

কিন্তু $\angle DAB$ এবং $\angle DCE$ একান্তর কোণ।

সুতরাং CE এবং BA সমান্তরাল এবং BC এদের ছেদক।

যেহেতু $\angle ABC$ = এক সমকোণ

$\therefore \angle BCE$ = এক সমকোণ।

এখন, ΔABC ও ΔBCE-এ, $AB = CE$, BC সাধারণ বাহু

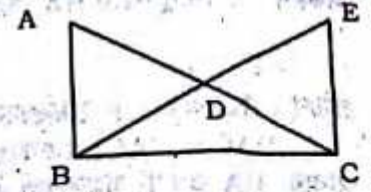
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCE$= এক সমকোণ।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta BCE$

বা, $BD + DE = AC$

বা, $BD + BD = AC$ [$\because BE = AC$]

বা, $2BD = AC$

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC$. (প্রমাণিত)

৯। ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC-এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ, এর $AB > AC$। $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

প্রমাণ : $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা AD

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

আবার, ΔABC এ $AB > AC$

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$ [বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর বলে

বা, $\angle ACD > \angle ABD$

বা, $\angle ACD + \angle CAD > \angle ABD + \angle CAD$ [উভয় পাশে $\angle CAD$ যোগ করে

বা, $\angle ACD + \angle CAD > \angle ABD + \angle BAD$---------(i) [$\because \angle CAD = \angle BAD$]

কিন্তু $\angle ACD + \angle CAD$ = বহিঃস্থ $\angle ADB$ ----------(ii)

এবং $\angle ABD + \angle BAD$ = বহিঃস্থ $\angle ADC$ -----------(iii)

এখন, (i) থেকে (ii) ও (iii) এর সাহায্যে লিখতে পারি, $\angle ADB > \angle ADC$

কিন্তু $\angle ADB + \angle ADC$ = এক সরলকোণ

এবং $\angle ADB > \angle ADC$ হওয়ায়, $\angle ADB > 90°$

$\therefore \angle ADB$ স্থূলকোণ। (প্রমাণিত)

১। প্রমাণ কর যে, কোন সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যেকোনো সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

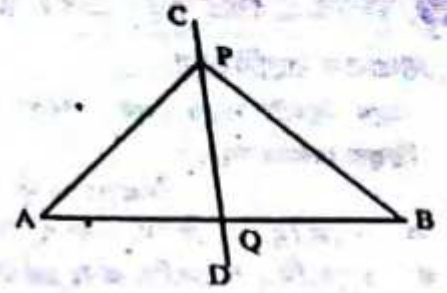
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AB একটি সরলরেখা এবং CD এর সমদ্বিখণ্ডক। CD লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : P ও A এবং P ও B যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু CD রেখা AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক সেহেতু CD রেখা AB রেখার মধ্যবিন্দু Q দিয়ে যায়।

$\therefore$ ΔPAQ এবং ΔPBQ-এর মধ্যে, $AQ = BQ$, PQ সাধারণ বাহু,
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AQP$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BQP$ [$\because$ CD রেখা AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক]

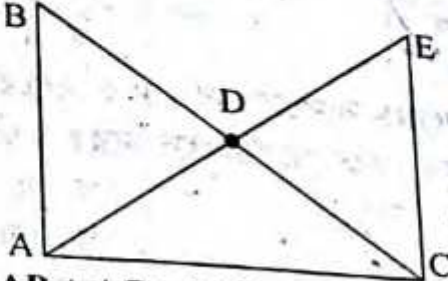
$\therefore$ ΔPAQ ও ΔPBQ সর্বসম।

$\therefore$ $PA = PB$ অর্থাৎ P বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)

২। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D

ক) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$

গ) প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2} BC$

সমাধান : ক)

খ) দেখাও হবে $AB + AC > 2AD$.

বিশেষ নির্বাচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহু মধ্যবিন্দু D। দেখাতে হবে যে, $AD + AC > 2AD$.

অংকন : A,D যোগ করি এবং AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = DE$ হয়। C,E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCDE এর মধ্যে

$AD = DE$ [অংকনানুসারে]

$BD = CD$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে]

এবং বিপ্রতীপ $\angle ADB = \angle CDE$

$\therefore \Delta ACE \cong \Delta CDE$

$\therefore AB = CE$ .... (i)

এখন, ΔACE এ $AC + CE > AE$.

বা, $AC + CE > AD + DE$

বা, $AC + AB > AD + DE$ [(i) নং হতে]

বা, $AC + AB > AD + AD$

বা, $AC + AB > 2AD$ [দেখানো হলো]

গ) খ, হতে দেখা যায়, $\Delta ABD \cong \Delta CDE$.

$\therefore$ $AB = CE$ এবং $\angle ABD = \angle DCE$ [একান্তর কোণ]

সুতরাং CE এবং AB সমান্তরাল এবং C এদের ছেদক।

যেহেতু $\angle BAC$ = এক সমকোণ

$\therefore$ $\angle ACE$ = এক সমকোণে

এখন, ΔBAC ও ΔACE এ $AB = CE$ AC.

সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ACE$

$\therefore$ $\Delta BAC \cong \Delta ACE$.

বা, $AD + DE = BC$

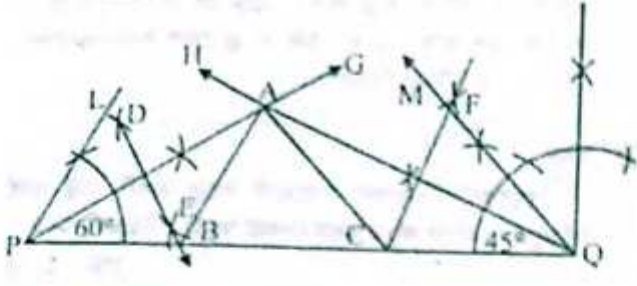
বা, $AD + AD = BC$ [$\because AE = BC$]

বা, $2AD = BC$

$\therefore$ $AD = \frac{1}{2} BC$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ–১। একটি ত্রিভুজ ABC আঁক, যার $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।

সমাধান: একটি ত্রিভুজ ABC আঁকতে হবে, যার $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।

অঙ্কনের ধাপ :

১। রেখাংশ PQ = 11 সে.মি. আঁকি।

২। PQ রেখাংশের একই পাশে P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle QPL = 60°$ ও $\angle PQM = 45°$ কোণ আঁকি।

৩। কোণ দুটির দ্বিখণ্ডক PG ও QH আঁকি। মনে করি, PG ও QH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। PA, QA রেখাংশের লম্ব দ্বিখণ্ডক আঁকি যা PQ রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

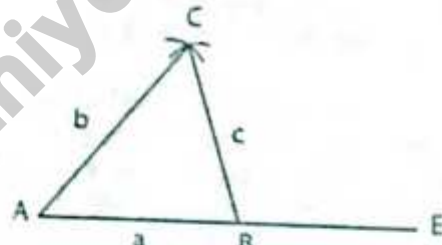
৫। A, B এবং A, C যোগ করি।
তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৭.১

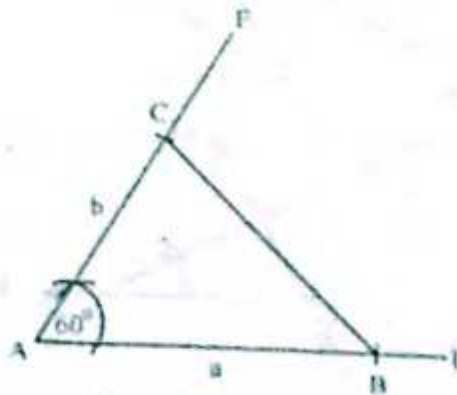
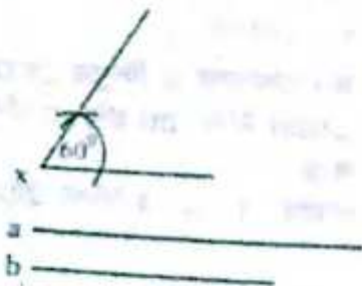
১। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. 3.5 সে.মি. 2.8 সে.মি.।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3 সে.মি. b = 3.5 সে.মি. ও c = 2.8 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

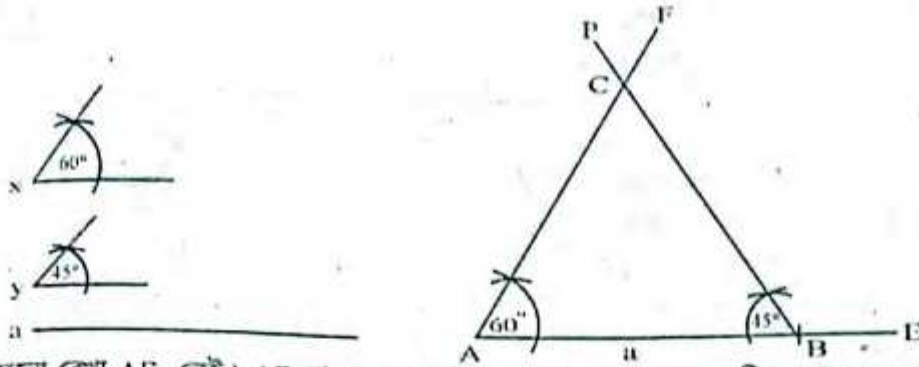
অঙ্কন :

যেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে a = 3cm এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB অংশ কাটি। A ও B কে কেন্দ্র করে b = 3.5 cm ও c = 2.8cm এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একই পার্শ্বে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুটি C বিন্দু ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 cm ও b = 3cm এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 60°$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে a = 4 cm সমান AB অংশ কাটি। A বিন্দুতে $\angle x = 60°$ সমান করে AF অংশ আঁকি। AF থেকে b = 3cm সমান করে AC অংশ কাটি। C,B যোগ করি, তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

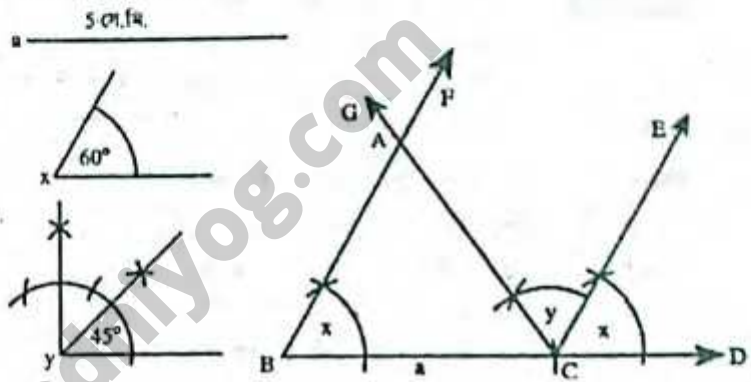
ঙ. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 40°$ এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 5$ cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

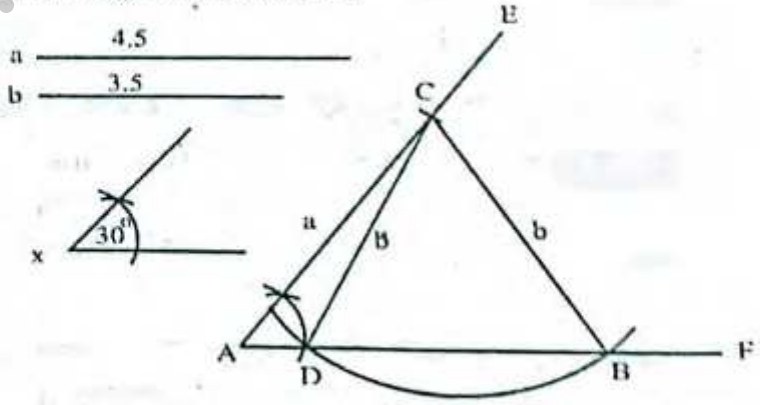
যেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে a = 5cm সমান করে AB অংশ কাটি। এখন A ও B কে কেন্দ্র করে $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 45°$ সমান করে দুইটি কোণ আঁকি। কোণ দুইটি F ও P পর্যন্ত বর্ধিত করলে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ছ) দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি.।

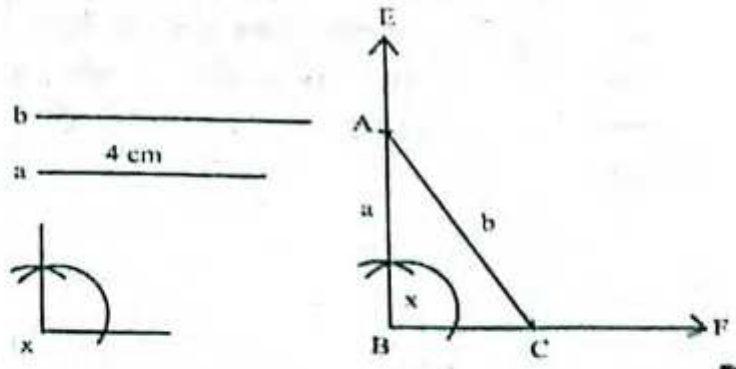
সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 45°$ কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BD হতে a এর সমান BC রেখাংশ নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle DCE$ আঁকি। CE রশ্মির C বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান করে $\angle ECG$ আঁকি। CG রশ্মি BF রশ্মির সাথে A বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

জ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30°।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4.5$ cm ও $b = 3.5$ cm এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রেখা AF নেই। A কে কেন্দ্র করে $\angle x = 30°$ সমান $\angle FAE$ আঁকি। AE থেকে $a = 4.5$ cm সমান করে AC অংশ কাটি। C কে কেন্দ্র করে $b = 3.5$ সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AF রেখার উপর একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা AF কে D ও B বিন্দুতে ছেদ করে। C, D ও C, B যোগ করি। তাহলে ADC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ঝ) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.

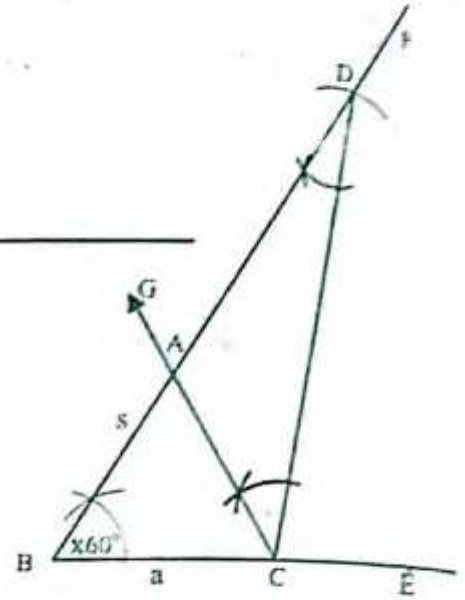
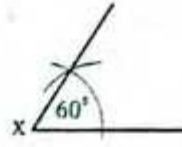
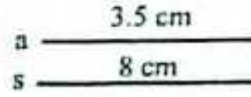
সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $b = 6$ সে.মি. এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

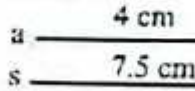
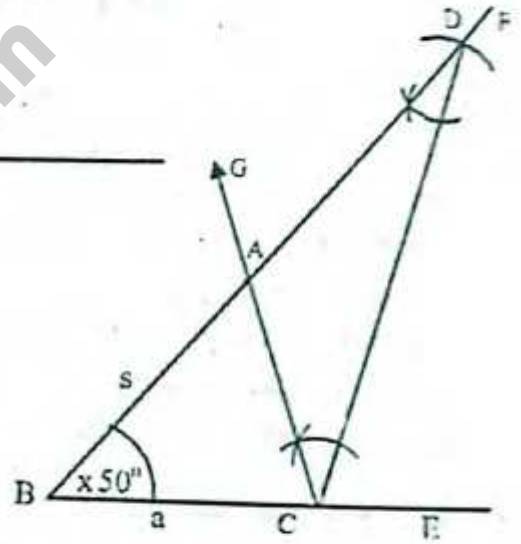
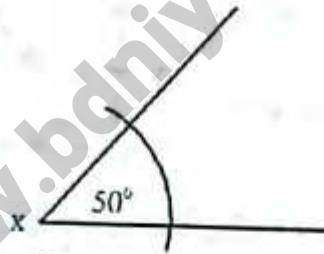
অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BF নিই। BF এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle FBE$ আঁকি। $\angle FBE$ এর BE হতে a = 4cm সমান করে BA অংশ কাটি। এবার A বিন্দু অতিভুজ b এর সমান করে BF এর উপর C বিন্দু আঁকি। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

ক) ভূমি 3.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি.।

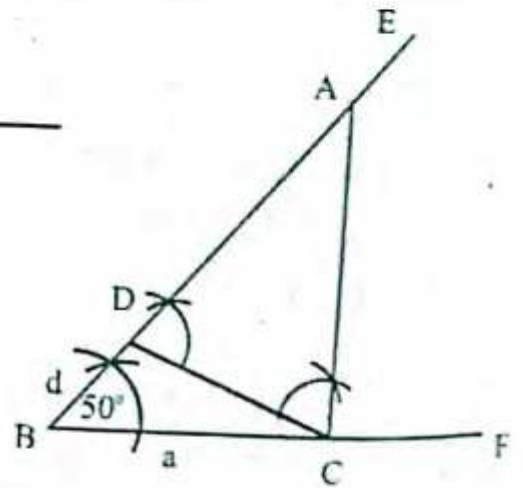
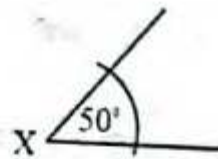
সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 3.5$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 60°$ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি $s = 8$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

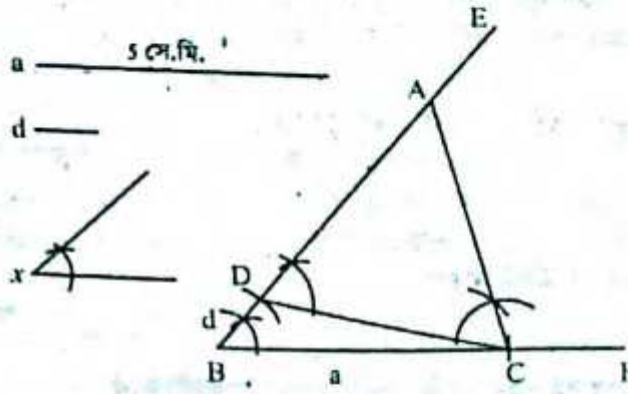
অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি BE নেই। BE থেকে $a = 3.5$ সমান BC অংশ কাটি। B বিন্দুতে $\angle x = 60$ সমান করে $\angle CBF$ আঁকি। BF থেকে $s = 8$ cm সমান করে BD অংশ কাটি এবং C, D যোগ করি। তখন DC এর C বিন্দুতে $\angle BDC$ এর সমান করে $\angle DCG$ আঁকি। CG রেখা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ) ভূমি 4 সে.মি. ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 50°C ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 7.5 সে.মি.।

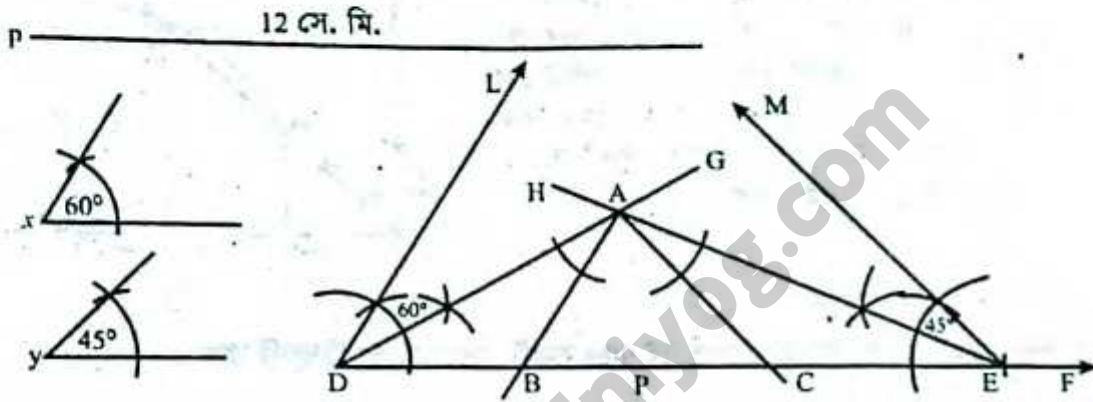
সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 4$ cm ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 50°$ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি $s = 7.5$ cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE নেই। BE থেকে $a = 4$cm সমান করে BC অংশ কাটি। B বিন্দুতে $\angle x = 50°$ সমান করে $\angle CBF$ আঁকি। BF থেকে $s = 7.5$ সমান করে BD অংশ কাটি। D, C যোগ করি। এখন DC এর C বিন্দুতে $\angle BDC$ এর সমান করে $\angle DCG$ আঁকি। CG রেখাংশ DB কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ. ভূমি 4 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোনো 50° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1.5 সে.মি.।

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 4$cm, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 50°$ ও অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 1.5$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি $a = 4$cm সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x = 50°$ এর সমান $\angle CBE$ আকি। BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই। C, D যোগ করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC–ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ঙ. ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে. মি.।

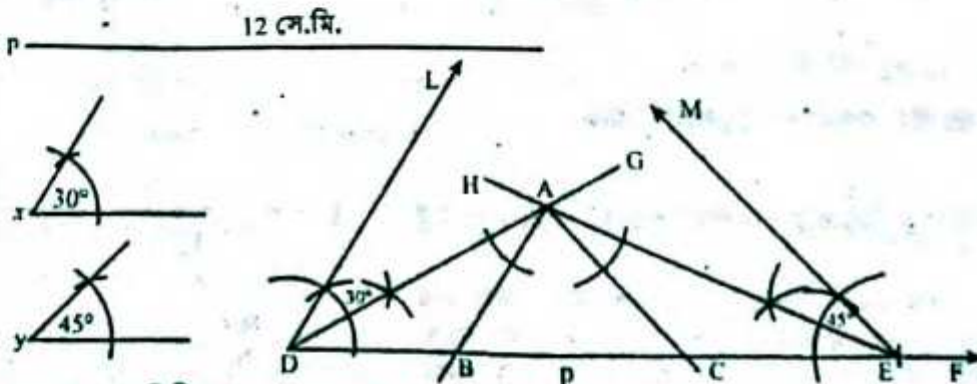
সমাধান : গ এর মত বর্ণনা : শুধু $\angle x = 45°$ ও $d = 1$ সে. মি.

চ. ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রম 60° ও 45° ও পরিসীমা 12 সে. মি.

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 45°$ এবং পরিসীমা $p = 12$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি DF থেকে পরিসীমা P = 12 সে.মি. সমান করে DE অংশ কাটি। D ও E বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে $\angle EDL$ ও $\angle DEM$ আঁকি। কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি। যারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ছ. ভূমি সংলগ্ন কোন দুইটি যথাক্রমে 30° ও 45° ও পরিসীমা 10 সে.মি.।

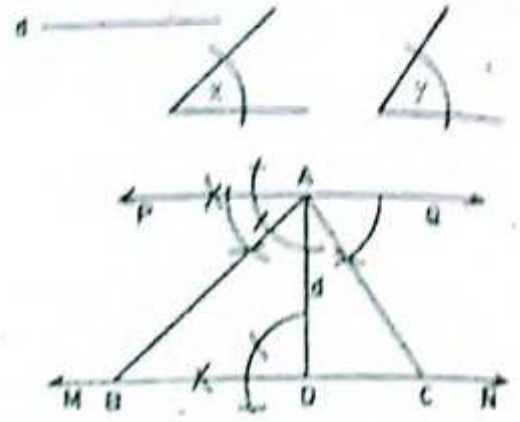
সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 30°$ ও $\angle y = 45°$ এবং পরিসীমা $p = 10$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি DF থেকে পরিসীমা P = 10 সে.মি. সমান করে DE অংশ কাটি। D ও E বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে $\angle EDL$ ও $\angle DEM$ আঁকি। কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি। যারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔACB-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

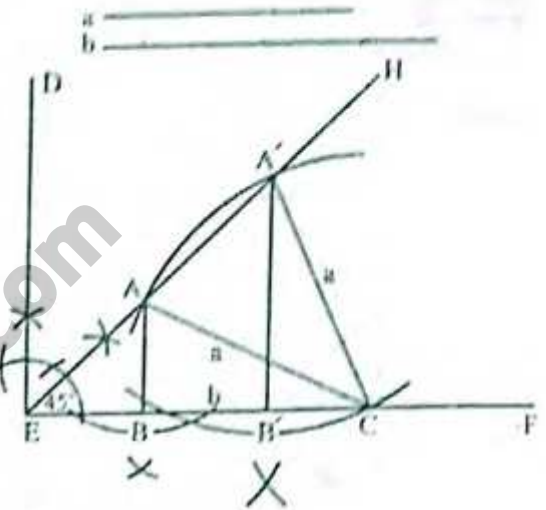
সমাধান :

মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ এবং শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য d দেয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো একটি রেখা হতে $\overrightarrow{AD} = d$ নিই। AD রেখার উপর A ও D বিন্দুতে যথাক্রমে PAQ ও MDN লম্বরেখা অঙ্কন করি। PQ রেখার A বিন্দুতে $\angle PAB = \angle X$ এবং $\angle QAC = \angle Y$ আঁকি। AB ও AC রেখা দুটি MN রেখাকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

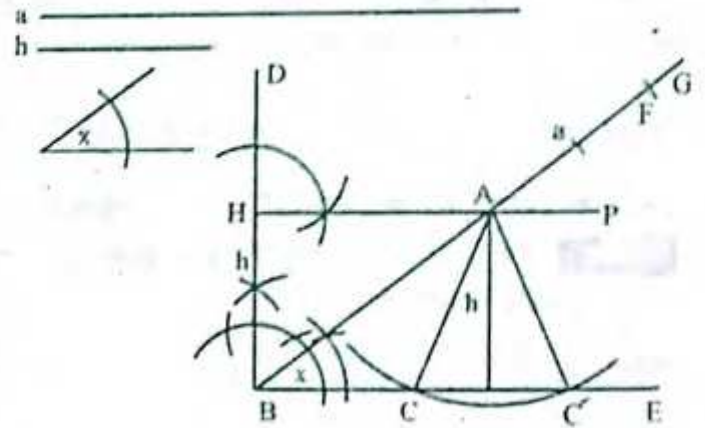
মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি b দেয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : $\overline{EF}$ একটি রেখাংশ নিই এবং তা হতে EC = b কেটে নিই। E বিন্দুতে $\angle HEC = 45°$ অঙ্কন করি। C কে কেন্দ্র করে অতিভুজ a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। বৃত্তচাপটি EH-কে A এবং A' বিন্দুতে ছেদ করে। A' C এবং AC যোগ করি। এখন A এবং A' হতে EC- এর উপর A' B' এবং AB লম্ব টানি। তাহলে ABC বা A'B'C উভয়ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৫। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ x, উচ্চতা h এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

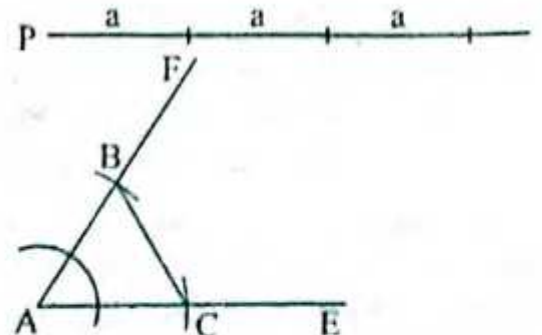
অঙ্কন : BE একটি রশ্মি নেই। B বিন্দুতে $\angle EBG = x$ কোণ এবং BD লম্ব আঁকি। BD হতে BH = h কেটে নেই। H বিন্দু দিয়ে HP ∥ BE টানি। HP রেখা BG- কে A বিন্দুতে ছেদ করে। এখন BG হতে BF = a কেটে নেই। A- কে কেন্দ্র করে AF- এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle X$- এর মধ্যবর্তী অংশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি BE- কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে। A ও C এবং A ও C' যোগ করি।

তাহলে $\triangle ABC$ বা $\triangle ABC'$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৬। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে ত্রিভুজটি আঁক।

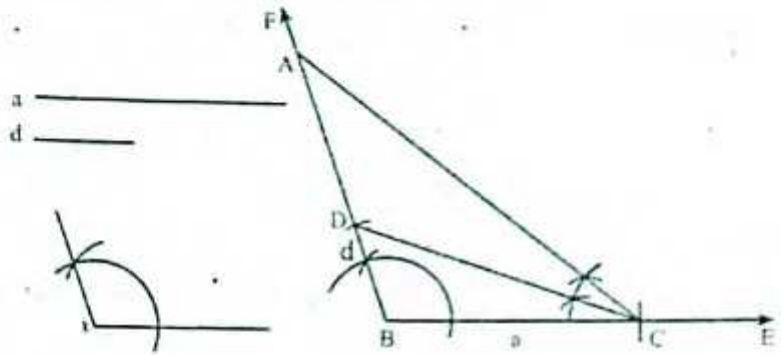
সমাধান :

মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা P দেয়া আছে। সমবাহু ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : পরিসীমা P কে সমান তিনটি ভাগে ভাগ করি। মনে করি প্রত্যেক ভাগের দৈর্ঘ্য a। যেকোনো সরলরেখা AE হতে a এর সমান করে AC অংশ কেটে নেই। AC এর A বিন্দুতে 60° কোণের সমান করে $\angle CAF$ অঙ্কন করি। এখন AF রেখা হতে a এর সমান করে AB অংশ কেটে লই। B ও C যোগ করি।

তাহলে $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ।

৭। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

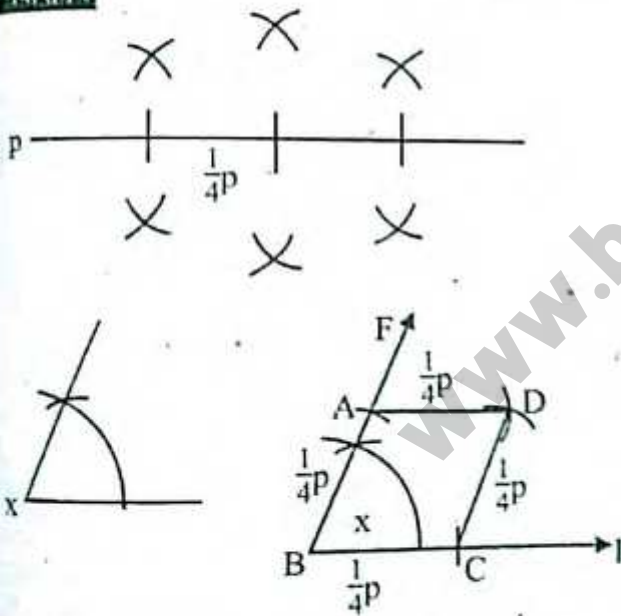
সমাধান : মনেকরি, ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ $\angle x$ ও অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কাটি। BC এর B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকি। BF থেকে অন্তর d এর সমান করে BD অংশ কাটি। D, C যোগ করি। C বিন্দুতে $\angle DCB$ এর সমান করে $\angle DCA$ আঁকি যা BE কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অনুশীলনী- ৭.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ :

১। রম্বসের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক। [পৃষ্ঠা-১৩০]

সমাধান :

মনে করি, কোনো রম্বসের পরিসীমা p ও একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। পরিসীমা p কে সমান চার অংশে ভাগ করি।

২। যেকোনো রশ্মি BE হতে $\frac{1}{4}$ p এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে CBF আঁকি।

৩। BF রশ্মি হতে $\frac{1}{4}$ p এর সমান করে BA রেখাংশ কেটে নিই।

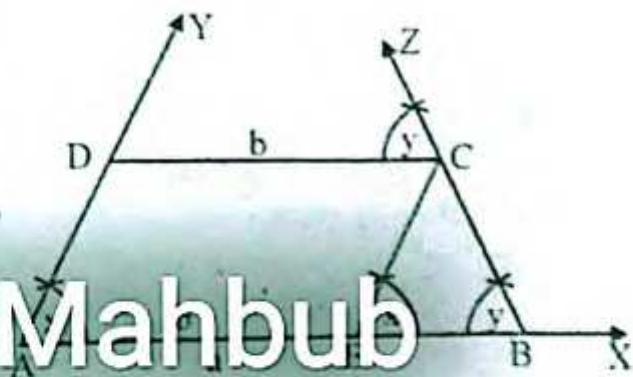
৪। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{4}$ p এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে ABCD-ই নির্ণেয় রম্বস।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১। ট্রাপিজিয়ামের দুটি সমান্তরাল বাহু এবং এদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁক।

সমাধান :

a ____________

b ____________

মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু ... যেখানে a > b এবং বৃহত্তর বাহু ... সংলগ্ন ... $\angle y$। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। যেকোনো রশ্মি AX থেকে AB = a নিই।

২। AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

৩। এবার AB রেখাংশ থেকে AE = b কেটে নিই। ... AY কে যা BZ রশ্মিতে C বিন্দুতে ছেদ করে ... CD ... D

৫। এখন CD || BA ... বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব?

ক) 63° ও 36° খ) 30° ও 70°
গ) 40° ও 50° ঘ) 80° ও 20°

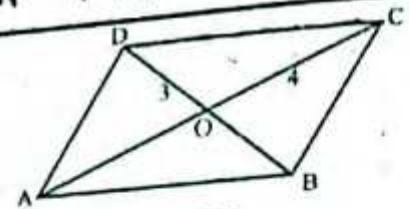
উত্তর : গ) 40° ও 50°

২. i. আয়ত একটি সামান্তরিক
ii. বর্গ একটি আয়ত
iii. রম্বস একটি বর্গ

ওপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : ক. i ও ii.

প্রদত্ত চিত্রের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। ΔAOB এর ক্ষেত্রফল কত?

ক) 6 বর্গ একক খ) 7 বর্গ একক
গ) 12 বর্গ একক ঘ) 14 বর্গ একক

উত্তর : ক) 6 বর্গ একক

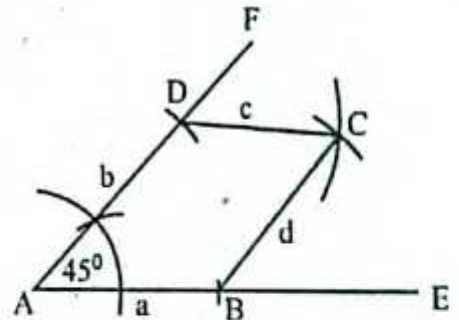
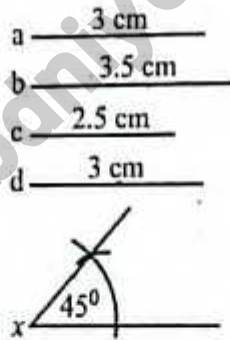
৪। চতুর্ভুজটির পরিসীমা –

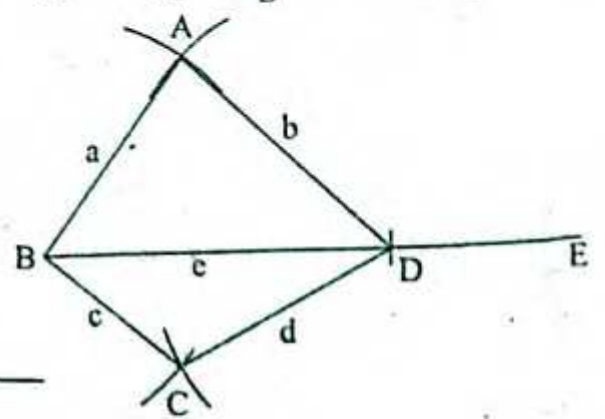
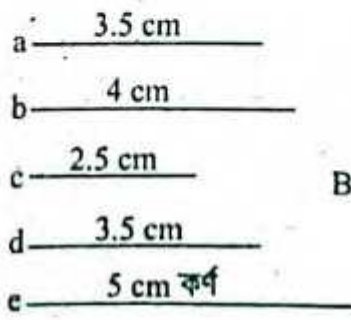
ক) 12 একক খ) 14 একক
গ) 20 একক ঘ) 28 একক

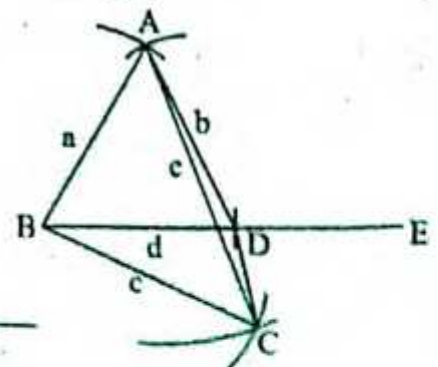
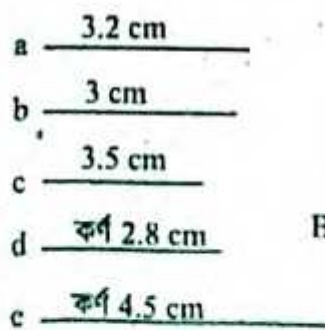
উত্তর : গ) 20 একক

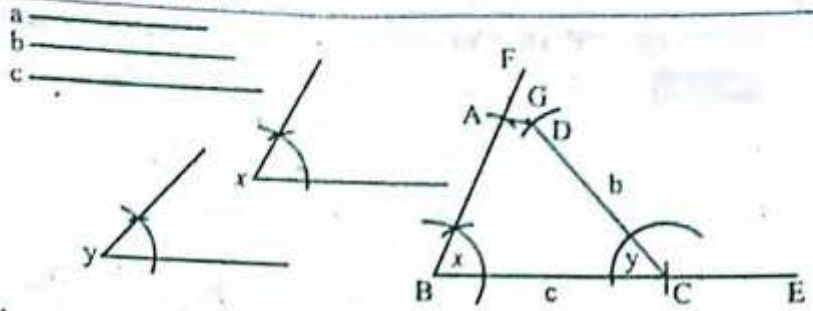
৫। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং একটি কোণ 45°।

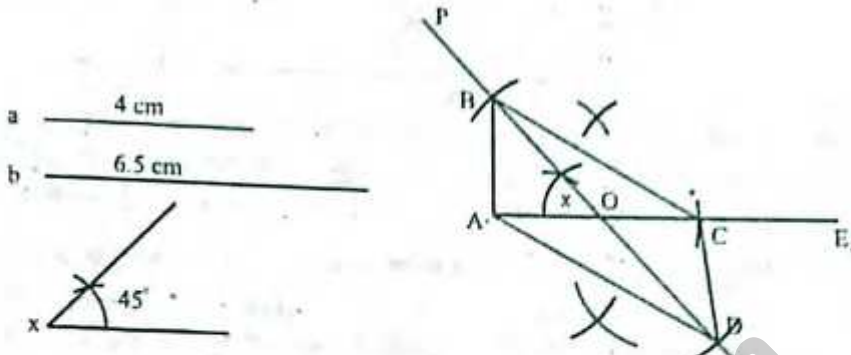
অঙ্কন :

খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি., 4 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং কর্ণ 5 সে.মি.।

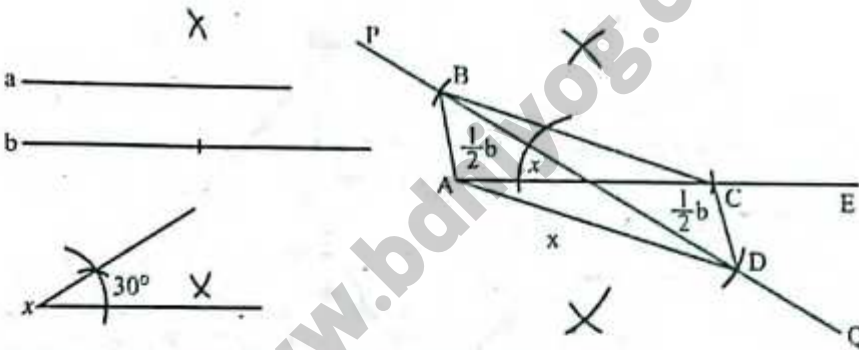
অঙ্কন :

গ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2.8 সে. মি. ও 4.5 সে.মি.।

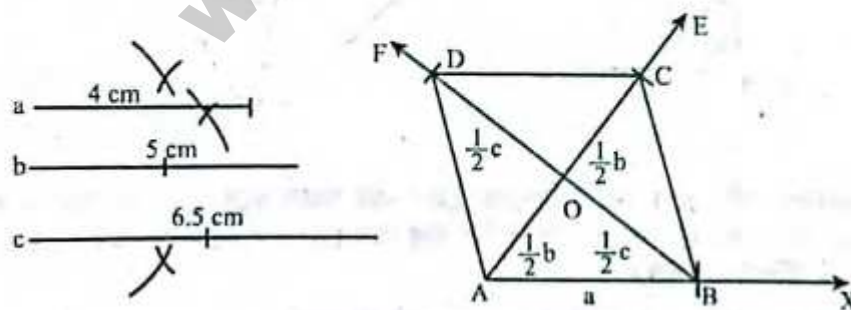
অঙ্কন :

ঘ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45°।

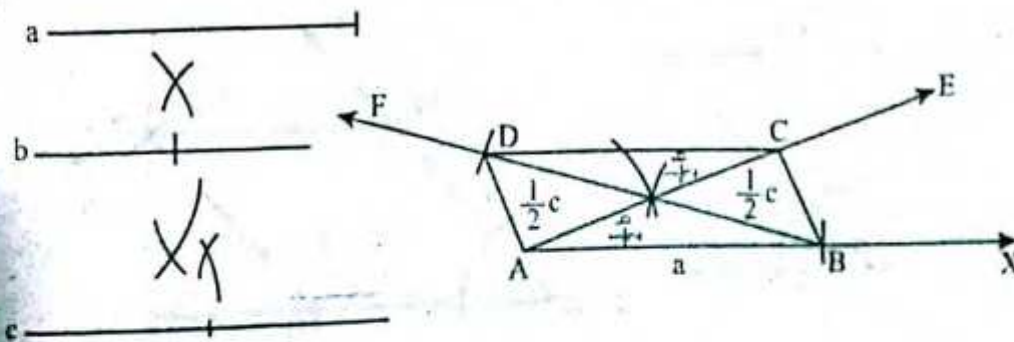
অঙ্কন :

৬। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর :

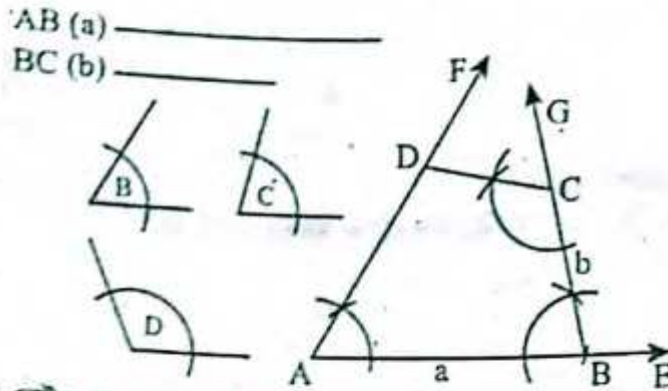
ক) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6.5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45°।

অঙ্কন :

খ) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6.5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30°.

অঙ্কন :

গ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. 6.5 সে.মি.

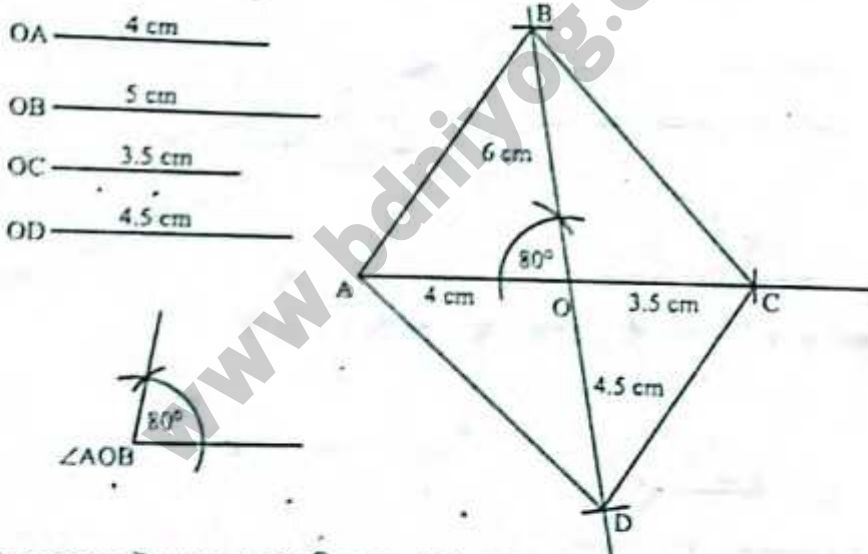
অঙ্কন :

ঘ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4.5 সে.মি., 6 সে.মি.।

অঙ্কন :

৭। ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে AB বাহুর সমান করে AB অংশ কেটে নেই। A ও B বিন্দুতে $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমান করে $\angle EAF$ এবং $\angle ABG$ কোণ আঁকি। BG থেকে BC বাহুর সমান করে BC অংশ কেটে নেই। এখন C বিন্দুতে $\angle D$ এর সমান করে $\angle BCD$ আঁকি যা AF রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

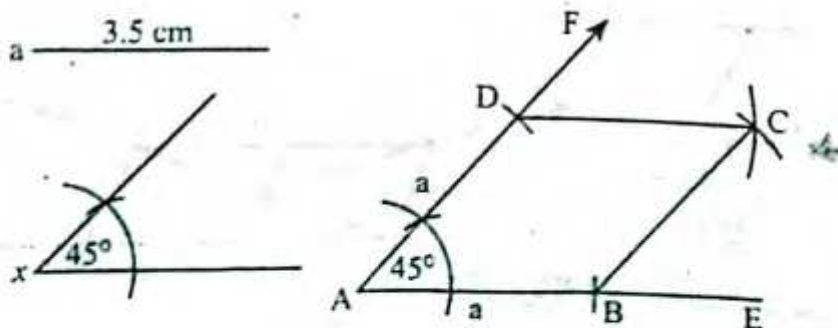
৮। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খন্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোনো যথাক্রমে OA = 4 সে.মি. OB = 5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও $\angle AOB = 80°$ চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান : দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খন্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোনো যথাক্রমে OA = 4 সে.মি., OB = 5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 45 সে.মি. ও $\angle AOB = 80°$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

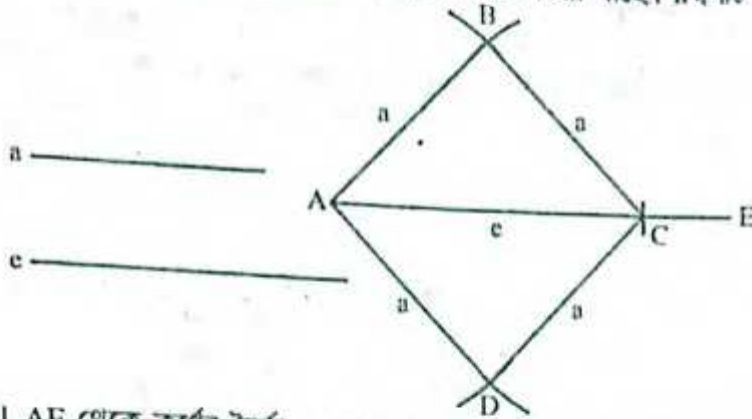
অঙ্কন :

OA = 4 cm একটি রেখাংশ নেই। AO এর O বিন্দুতে $\angle 80°$ এর সমান করে $\angle AOB$ আঁকি। এখন AO কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = 3.5cm হয় এবং OB কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OD = 4.5cm হয় এখন, A, B; B,C;C,D; ও D,A যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

৯। রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে. মি. ও একটি কোণ 45°; রম্বসটি আঁক।

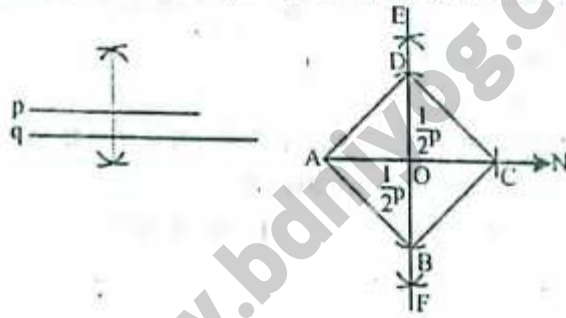
সমাধান : মনে করি, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ $\angle x = 45°$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে a = 3.5 এর সমান করে AB অংশ কাটি। AB এর A বিন্দুতে ∠BAF আঁকি। AF থেকে a এর সমান করে AD অংশ কাটি। এখন AD ও AB এর D ও B কে কেন্দ্র করে ∠BAD এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করে। D, C ও B, C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১০। রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান : মনে করি, রম্বসের, একটি বাহু a এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে কর্ণের দৈর্ঘ্য e এর সমান করে AC অংশ কাটি। এখন A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে উভয় দিকে দুইটি করে চারটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপগুলোর পরস্পর B ও D বিন্দুতে ছেদ করে। A, B; A, D; B, C এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD–ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১১। দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান : মনে করি, একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p ও q দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১. যেকোনো রশ্মি AN থেকে q এর সমান করে AC রেখাংশ কেটে নিই।

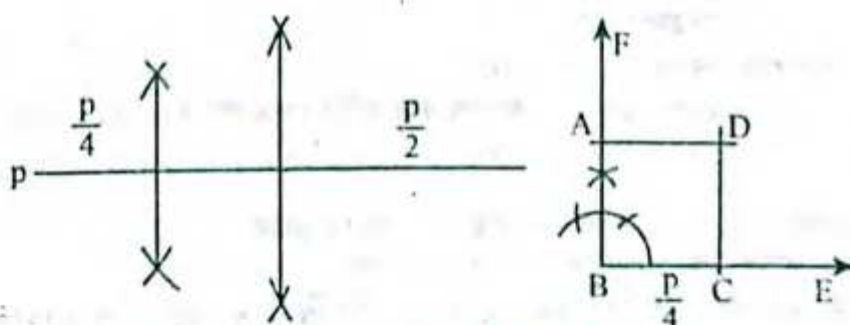
২. AC–এর লম্বদ্বিখণ্ডক EF আঁকি। EF, AC–কে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

৩. OE ও OF হতে $\frac{1}{2}p$ এর সমান করে যথাক্রমে OD ও OB কেটে নিই।

৪. A, B; B, C; C, D ও A, D যোগ করি।

তাহলে ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

১২। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা p দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : পরিসীমা P কে প্রথমে সমান দুইভাগে ভাগ করে তার অর্ধেক অংশকে পুনরায় সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। ফলে ক্ষুদ্রতম অংশ $\frac{p}{4}$ এর সমান হবে। যেকোনো রশ্মি BE হতে BC = $\frac{p}{4}$ কেটে নেই। BE রশ্মির B বিন্দুতে ∠EBF = 90° আঁকি।

BF হতে BA = $\frac{p}{4}$ নেই। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{p}{4}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠EBF এর মধ্যবর্তী অংশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দু'টি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D এবং C, D যোগ করি।
তাহলে, ABCD- ই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

১৩। জকী ও জাফরুল সাহেবের বসত বাড়ি একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত এবং বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান। তবে জকীর সাহেবের বাড়ির আকৃতি আয়তাকার এবং জাফরুল সাহেবের বাড়ি সামান্তরিক আকৃতির।

ক. ভূমির দৈর্ঘ্য ১০ একক এবং উচ্চতা ৮ একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা অঙ্কন কর। ২

খ. দেখাও যে, জকী সাহেবের বাড়ির সীমারেখা জাফরুল সাহেবের বাড়ির সীমারেখা অপেক্ষা ছোট। ৪

গ. জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গ একক হলে, তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

সমাধান :

ক)

মনে করি, ABCD আয়তক্ষেত্রটি মি. জকীর বাড়ি এবং EFGH সামান্তরিক ক্ষেত্রটি মি. জাফরুলের বাড়ি। এরা একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত।
বাড়ি দুটির ক্ষেত্রফল সমান।
দৈর্ঘ্য AB = EH = 10 একক এবং উচ্চতা EM = 4 একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা আঁকা হয়েছে।

খ) দেখাতে হবে মি. জকীর বাড়ির সীমারেখা জাফরুল সাহেবের সীমারেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা EFGH সামান্তরিকের পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
অঙ্কন : E বিন্দু হতে EM ⊥ FG আঁকি।
প্রমাণ : আয়তক্ষেত্র ABCD এবং সামান্তরিক EFGH এর ক্ষেত্রফল সমান ও এরা সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত।
∴ তারা একই সমান্তরাল যুগল BG এবং AH এর মধ্যে অবস্থিত।
∴ AB = CD = EM = 8 একক [∵ এরা প্রত্যেকে BG ∥ AH এর লম্ব দূরত্ব]
এখন ΔEMF−এ ∠EMF = 90° [∵ EM ⊥ FG]
∴ EF, ΔEFM−এর অতিভুজ।
∴ EM < EF [∵ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু]
অর্থাৎ AB < EF [∵ AB = EM]
∴ CD < GH [∵ EF = GH এবং AB = CD]
বা, AB + CD < EF + GH .... (i)
আবার, BC = AD = FG = EH = 10 একক [∵ ক্ষেত্রদ্বয় সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত]
∴ BC + AD = FG + EH .... (ii)
∴ AB + BC + CD + AD < EF + FG + GH + EH [(i) নং ও (ii) নং যোগ করে]
∴ ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা <EFGH সামান্তরিকের পরিসীমা।
∴ মি. জকীর বাড়ির পরিসীমা < মি. জাফরুলের পরিসীমা। (দেখানো হলো)

গ) জকী ও জাফরুল সাহেবের বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান।
∴ তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত = 1 : 1 **(Ans.)**
জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 হওয়ায় তার বাড়ির ক্ষেত্রফল, $4x \times 3x = 300$
বা, $12x^2 = 12 \times 25$
∴ $x = 5$
জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য 4 × 5 বা 20 একক এবং প্রস্থ 3 × 5 বা 15 একক
সুতরাং জাফরুল সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য 20 একক এবং প্রস্থ 15 একক

১৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 7 সে.মি ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি, ∠A = 85°, ∠B = 80° এবং ∠C = 95°
ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ৪

গ. ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর। ৪

সমাধান :

ক) মনে করি, ΔABC–এ ∠B = 90°, BC = 4 সে.মি. এবং অতিভুজ AC = 7 সে.মি.। [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 7^2 - 4^2$

$= 49 - 16 = 33$

$\therefore AB = \sqrt{33} = 5.75$ সে.মি.

$\therefore$ অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = 5.75 সে.মি. (প্রায়)

খ) সাধারণ নির্বচন : একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ h = 7 সে.মি. এবং অন্য একবাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই। B বিন্দুতে BN ⊥ BE আঁকি।

২। C বিন্দুকে কেন্দ্র করে h এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। এটি BN কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি।

তাহলে, ΔABC–ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ) ΔABC–এর পরিসীমা = AB + BC + AC

= (5.75 + 4 + 7) সে.মি.

= 16.75 সে.মি.

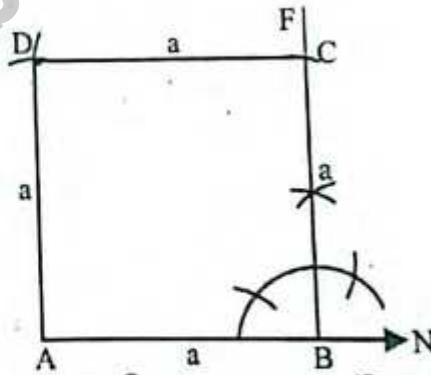
এর সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ আঁকতে হবে।

বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 16.75 সে.মি.

বর্গক্ষেত্রের চারটি বাহু পরস্পর সমান।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য = (16.75 ÷ 4) সে.মি.

= 4.2 সে.মি. (প্রায়)

a ——— 4.2 সে.মি. ———

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4.2 সে.মি. দেওয়া আছে। বর্গটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। AN যেকোনো রশ্মি হতে AB = a কেটে নিই।

২। AB–এর B বিন্দুতে BE ⊥ AB আঁকি।
BE রশ্মি হতে BC = a কেটে নিই।

৩। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠ABC এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। A, D এবং C, D যোগ করি।
তাহলে ABCD–ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

১৫। ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি. BC = 5 সে.মি ∠A = 85°, ∠b = 80° এবং ∠C = 95°

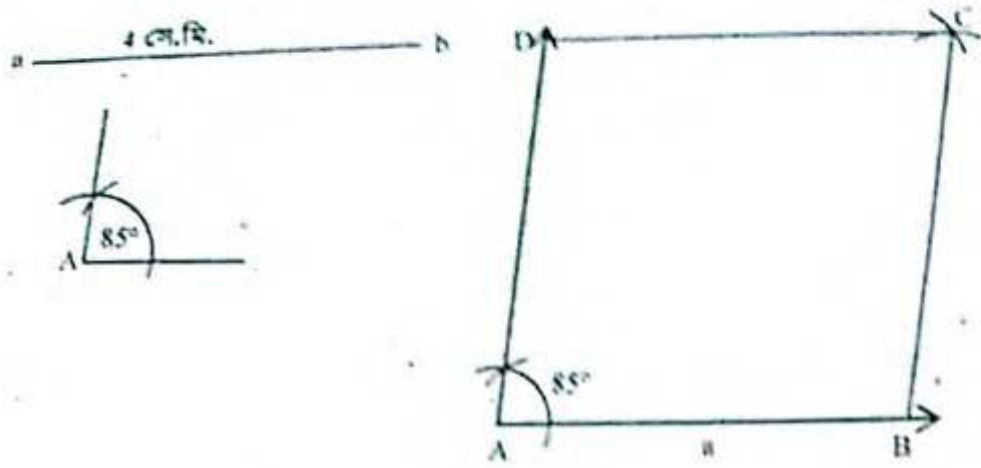
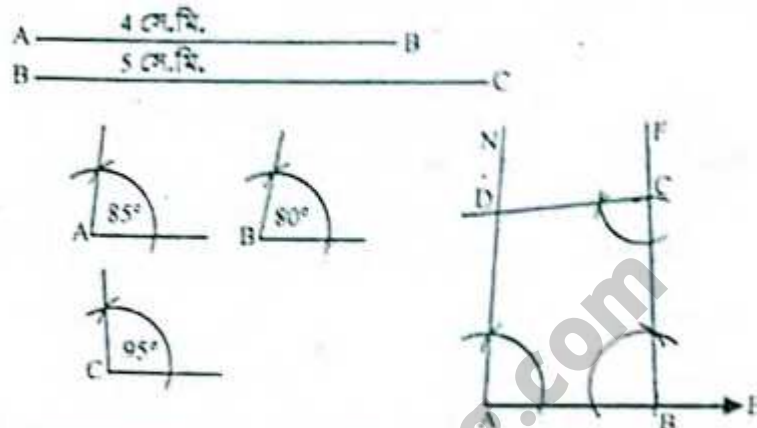
উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

ক. একটি রম্বস অঙ্কন করে উহার নাম দাও। ২

খ. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর। ৪

গ. প্রদত্ত চতুর্ভুজের পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর। ৪

সমাধান :

ক)

খ)

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি., BC = 5 সে.মি., ∠A = 85°, ∠B = 80° এবং ∠C = 95° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। যেকোনো রশ্মি AE হতে AB = 4 সে.মি., কেটে নিই। AB এর A বিন্দুতে ∠BAN = ∠A এবং B বিন্দুতে ∠ABF = ∠B আঁকি।

২। BF হতে BC = 5 সে.মি., কেটে নিই। BC-এর C বিন্দুতে ∠BCF = ∠C আঁকি।

৩। CF রশ্মি AN কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

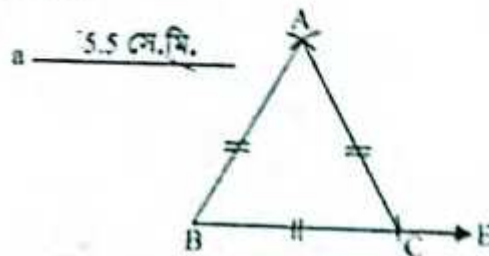
গ) মেপে দেখা যাচ্ছে, ABCD চতুর্ভুজের CD = 2.5 সে.মি. এবং AD = 5 সে.মি.

চতুর্ভুজটির পরিসীমা = AB + BC + CD + AD সে.মি.

= (4 + 5 + 2.5 + 5) সে.মি.

= 16.5

∴ সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = 16.5 সে.মি.

= 5.5 সে.মি.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a = 5.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। যেকোনো রশ্মি BE হতে a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

২। B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC-এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। A, B এবং A, C যোগ করি।

তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অধ্যায় ৮ বৃত্ত

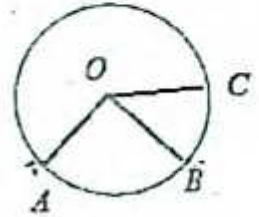
□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বৃত্তচাপ, কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে।
- বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য বর্ণনা করতে পারবে।

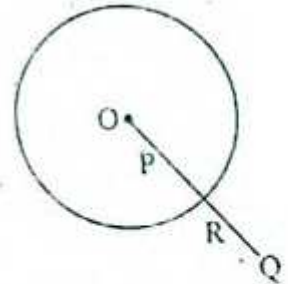
যা মনে রাখতে হবে...

□ বৃত্ত

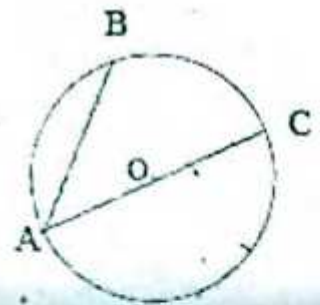
বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্ব বজায় রেখে কোনো বিন্দু যে আবদ্ধ পথ চিত্রিত করে তাই বৃত্ত। কেন্দ্র হতে বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্বকে ব্যাসার্ধ বলে।

মনে করি, O সমতলের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট পরিমাপ। সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেট বৃত্ত, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, A, B ও C বৃত্তস্থ বিন্দু। OA, OB ও OC এর প্রত্যেকটি বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বিন্দু বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়। উপরের চিত্রে A, B ও C সমবৃত্ত বিন্দু।

□ বৃত্তের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r হয় তবে O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে কম তাদের সেটকে বৃত্তটির অভ্যন্তর এবং O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে বেশি তাদের সেটকে বৃত্তটির বহির্ভাগ বলা হয়। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে বৃত্তের অভ্যন্তরেই থাকে।

কোনো বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে, P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে।

□ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস

বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। বৃত্তের কোনো জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়। অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস। চিত্রে, AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O। এদের মধ্যে AC জ্যাটি ব্যাস; কারণ জ্যাটি বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। OA ও OC বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ। সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক ব্যাসের মধ্যবিন্দু। অতএব প্রত্যেক ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2r, যেখানে r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

অনুশীলনী- ৮.১

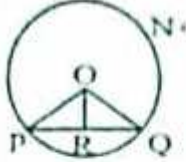
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–১: উপপাদ্য–১ এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ :

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে প্রমাণ কর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে–প্রমাণ করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQN বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা PQ এবং OR, PQ এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, PR = RQ

অঙ্কন : O, P এবং O, Q যোগ করি।

প্রমাণ :

	যথার্থতা
$\angle ORP = \angle ORQ$ = এক সমকোণ।	[OR ⊥ PQ]
সমকোণী ΔOPR ও সমকোণী ΔOQR এ অতিভুজ OP = অতিভুজ OQ	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OR = OR	[সাধারণ বাহু]
∴ $\Delta ORP \cong \Delta ORQ$	[অতিভুজ–বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]
∴ PR = RQ [প্রমাণিত]	

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.১

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ACBD বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, ACBD বৃত্তের কেন্দ্র।

অঙ্কন : বৃত্তটির কেন্দ্র E না ধরে O ধরি এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ : জানা আছে যে, বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা–এর মধ্যবিন্দু E.

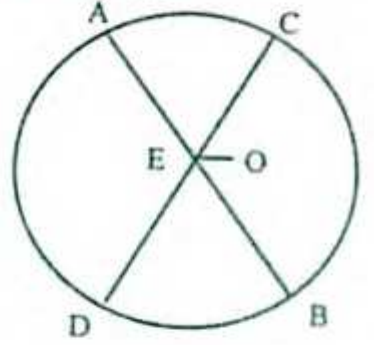
∴ $OE \perp AB$ অর্থাৎ $\angle OEA$ = এক সমকোণ।

আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা–এর মধ্যবিন্দু E.

∴ $OE \perp CD$ অর্থাৎ $\angle OEC$ = এক সমকোণ।

যেহেতু AB এবং CD দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা।

∴ $\angle OEA$ এবং $\angle OEC$ উভয়ই এক সমকোণ হতে পারে না।

সুতরাং, E বিন্দুটি ACBD বৃত্তের কেন্দ্র। (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা–এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যা–দ্বয়ের উপর লম্ব।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা–এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যা–দ্বয়ের উপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। এর AB ও CD সমান্তরাল জ্যা–দ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

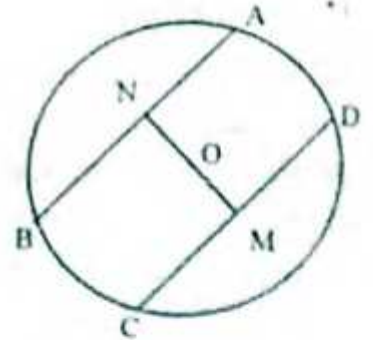
অঙ্কন : O, N এবং O, M যোগ করি।

প্রমাণ : জানা আছে, বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা–এর উপর লম্ব। O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু N.

∴ $ON \perp$ জ্যা AB

আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা এর মধ্যবিন্দু M.

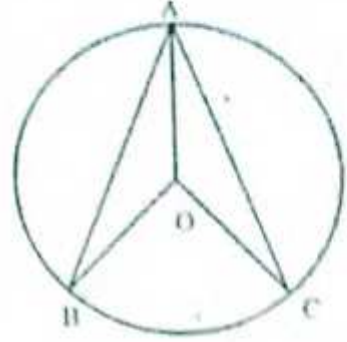
∴ $OM \perp$ জ্যা CD অর্থাৎ ON ও OM, O বিন্দু হতে যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

সুতরাং ON এবং OM একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। (প্রমাণিত)

৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC.

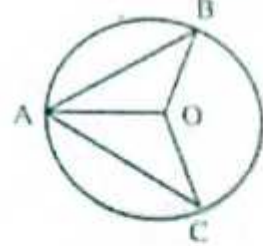
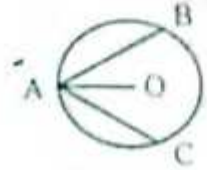
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB ও AC দুইটি জ্যা। O, A যোগ করা হল। AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ OA এর সাথে সমান কোণ ∠OAB ও ∠OAC উৎপন্ন করে অর্থাৎ ∠OAB = ∠OAC.
প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC.

অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : ΔAOB-এ OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
∴ ∠OBA = ∠OAB [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]
আবার, ΔAOC- এ
OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
∴ ∠OCA = ∠OAC
এখন, ∠OAB = ∠OAC [দেওয়া আছে]
∴ ∠OBA = ∠OCA
এখন, ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে
OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
∠OAB = ∠OAC
এবং, ∠OBA = ∠OCA
∴ ΔAOB ≅ ΔAOC
সুতরাং AB = AC. (প্রমাণিত)

৪। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC. প্রমাণ কর যে, ∠BAO = ∠CAO.

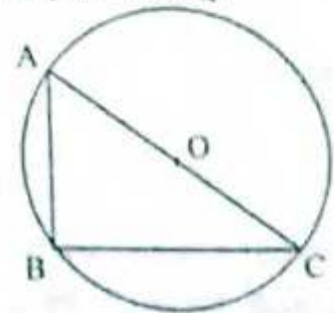
সমাধান: সাধারণ নির্বচন : চিত্রে দেয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC. প্রমাণ করতে হবে যে, ∠BAO = ∠CAO.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং AB জ্যা = AC জ্যা।
O, A যোগ করা হল।
প্রমাণ করতে হবে যে, ∠BAO = ∠CAO.

অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।
প্রমাণ : ΔAOB ও ΔAOC এ
AB = AC [দেওয়া আছে]
OB = OC [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং, OA সাধারণ বাহু।
∴ ΔAOB ≅ ΔAOC [∵ ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুত্রয় সমান]
∴ ∠BAO = ∠CAO. (প্রমাণিত)

৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাতে হবে যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী ΔABC এর ∠ABC = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। মনে করি, এই বৃত্তের কেন্দ্র O. প্রমাণ করতে হবে যে, O, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : ∠ABC = এক সমকোণ [কল্পনা অনুসারে]
∴ ∠ABC, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ হবে।
∴ A, B, C বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস AC.
সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O ব্যাস AC এর উপর অবস্থিত এবং OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
∴ O, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, AFB ও CHD উভয় বৃত্তের কেন্দ্র O. AFB বৃত্তের জ্যা AB, বৃত্ত CHD কে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD.

অঙ্কন ঃ $OE \perp AB$ টানি।

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

AFB বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা AB.

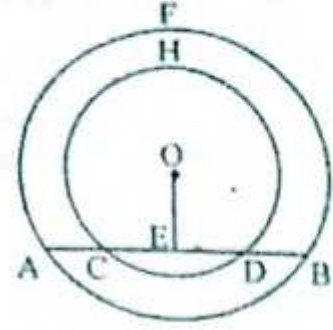
$\therefore$ AE = BE .... (i)

আবার, CHD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা CD.

$\therefore$ CE = DE .... (ii)

সমীকরণ (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, AE – CE = BE – DE

বা, AC = BD [$\because$ AE – CE = AC এবং BE – DE = BD]

$\therefore$ AC = BD (প্রমাণিত)

৬। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন ঃ বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাতে হবে যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD দুইটি সমান জ্যা P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB এর অংশদ্বয় = CD এর অংশদ্বয়। অর্থাৎ AP = CP এবং DP = BP.

অংকন ঃ O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব আঁকি। O, P যোগ করি।

প্রমাণ ঃ যেহেতু OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ $EB = \frac{1}{2}$ AB

তদ্রূপ, $FD = \frac{1}{2}$ CD

কিন্তু AB = CD বলে,

EB = FD ....(i)

এখন, Δ POE ও Δ POF দ্বয়ের মধ্যে,

OE = OF [সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী]

OP বাহু সাধারণ

এবং $\angle OEP = \angle OFP$ [$\because OF \perp CD$ এবং $OE \perp AB$]

$\therefore$ $\Delta POE \cong \Delta POF$

$\therefore$ PE = PF .... (ii)

এখন, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

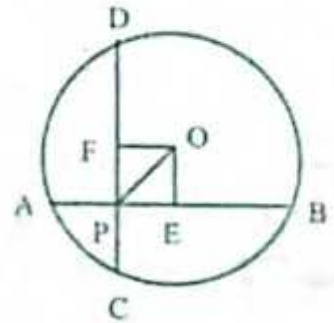
EB + PE = FD + PF

বা, BP = DP

আবার, AB = CD বলে,

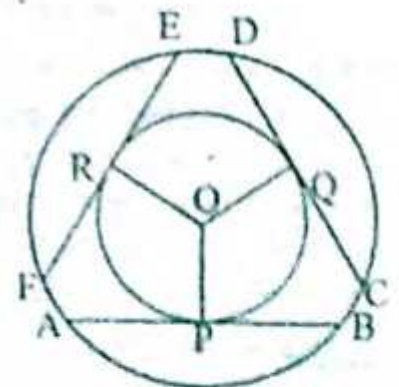
AB – BP = CD – DP

বা, AP = CP

$\therefore$ AP = CP এবং DP = BP. (প্রমাণিত)

৭। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন ঃ প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে AB, CD এবং EF তিনটি সমান জ্যা। P, Q ও R যথাক্রমে AB, CD ও EF-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q, R বিন্দুত্রয় সমবৃত্ত।

অঙ্কন ঃ O, P, O, Q এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P, AB এর মধ্যবিন্দু;

সুতরাং, $OP \perp AB$.

তদ্রূপ, $OQ \perp CD$ এবং $OR \perp EF$.

আমরা জানি, সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ $OP = OQ = OR$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP, OQ, OR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা P, Q ও R বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, P, Q, R বিন্দুত্রয় সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৮। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র, AB তার ব্যাস। AB এর দুই প্রান্ত হতে এর বিপরীত দিকে AE ও BF এ দুটি জ্যা অঙ্কন করা হল যেন $AE = BF$ হয়।

দেখাতে হবে যে, $AE \parallel BF$.

অঙ্কন : A, F ও B, E যোগ করি।

প্রমাণ : AB বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$ $\angle AEB$ = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

এবং, $\angle AFB$ = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

এখন, সমকোণী ΔAEB এবং সমকোণী ΔAFB এ

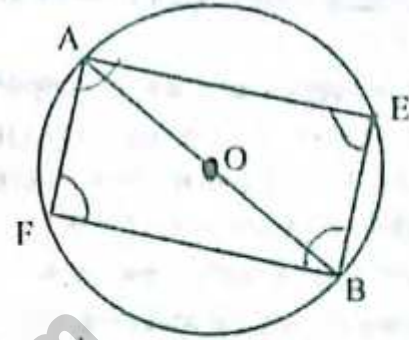
অতিভুজ AB উভয় ত্রিভুজের জন্য সাধারণ।

এবং $AE = BF$ [কল্পনা অনুসারে]

$\therefore \Delta AEB \cong \Delta AFB$ [$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং একটি বাহু সমান]

সুতরাং $\angle BAE = \angle ABF$

কিন্তু $\angle BAE$ এবং $\angle ABF$ একান্তর কোণ, যাদের ছেদক AB.

$\therefore$ $AE \parallel BF$. (প্রমাণিত)

৯। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AEBF বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ব্যাস। AB ব্যাসের প্রান্তদ্বয় A ও B হতে এর বিপরীত দিকে অঙ্কিত AE ও BF জ্যা-দ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

দেখাতে হবে যে, $AE = BF$.

অঙ্কন : O হতে BF ও AE এর উপর যথাক্রমে OC এবং OD লম্ব টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OC \perp$ জ্যা BF

$\therefore$ $BC = FC = \frac{1}{2}$ BF .... (i)

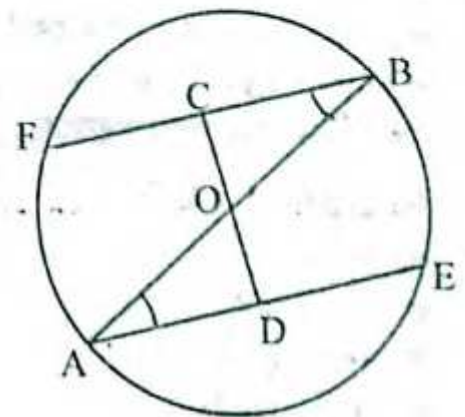
আবার, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OD \perp$ জ্যা AE

$\therefore$ $AD = ED = \frac{1}{2}$ AE .... (ii)

এখন, $AE \parallel BF$ এবং AB ছেদক

$\therefore$ $\angle ABF = \angle BAE$ [একান্তর কোণ বলে]

বা, $\angle OBC = \angle OAD$

এখন, ΔBOC এবং ΔAOD এ

$\angle OCB = \angle ODA$ [অঙ্কন অনুসারে প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\angle OBC = \angle OAD$

এবং $OB = OA$ [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore\ \Delta BOC \cong \Delta AOD$ [∵ ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং একটি বাহু পরস্পর সমান]

সুতরাং, $BC = AD$

বা, $\frac{1}{2}\ BF = \frac{1}{2}\ AE$ [(i) নং এবং (ii) নং থেকে]

বা, $BF = AE$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore\ AE = BF$. (প্রমাণিত)

১০। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা–এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা–এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ও CD এর দুটি জ্যা এবং AB>CD। OE এবং OF কেন্দ্র হতে যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, OE < OF .

অঙ্কন : O,A এবং O,C যোগ করি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যে কোন জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা–কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp$ জ্যা AB

$\therefore\ AE = BE = \frac{1}{2}\ AB$

আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র $OF \perp$ জ্যা CD

$\therefore\ CF = DF = \frac{1}{2}\ CD$

এখন, সমকোণী ΔOAE এবং ΔOCF এর অতিভুজ যথাক্রমে OA এবং OC

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$OA^2 = OE^2 + AE^2$

$OC^2 = OF^2 + CF^2$

কিন্তু, $OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

বা, $OA^2 = OC^2$

বা, $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$

বা, $AE^2 - CF^2 = OF^2 - OE^2$.............. (i)

আবার, AB>CD [কল্পনা অনুসারে]

বা, $\frac{1}{2}\ AB > \frac{1}{2}\ CD$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $AE > CF$

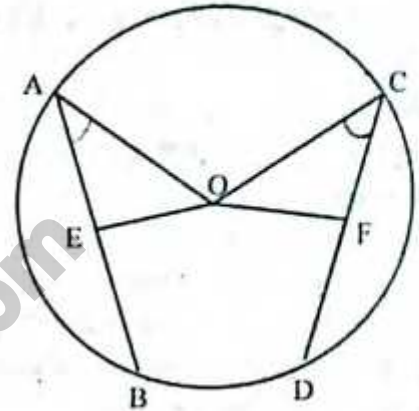
বা, $AE^2 > CF^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $AE^2 - CF^2 > 0$

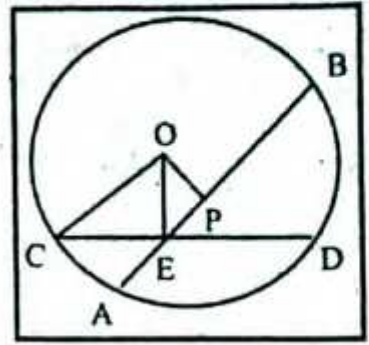
বা, $OF^2 - OE^2 > 0$ [(i) নং থেকে]

বা, $OF^2 > OE^2$

বা, $OF > OE$

$\therefore\ OE < OF$. (প্রমাণিত)

১১। কোনো বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং CD অন্য যেকোনো জ্যা যার মধ্যবিন্দু E, AB জ্যা–এ অবস্থিত। দেখাও যে, E যতই AB এর মধ্যবিন্দুর নিকটবর্তী হয়, CD এর দৈর্ঘ্য ততই বর্ধিত হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং CD অন্য যেকোনো জ্যা যার মধ্যবিন্দু E, AB জ্যা–এ অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, E যতই AB এর মধ্যবিন্দুর নিকটবর্তী হয়, CD এর দৈর্ঘ্য ততই বর্ধিত হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB হলো একটি নির্দিষ্ট জ্যা, যার মধ্যবিন্দু P. এখন অপর একটি জ্যা CD এর মধ্যবিন্দু E, AB এর উপর অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, E যতই P এর নিকটবর্তী হয় CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকে।

অঙ্কন : O, P; O, C এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ : E, CD জ্যা–এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $OE \perp$ জ্যা CD [$\because$ বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন জ্যা–এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখা ঐ জ্যা–এর উপর লম্ব]

সমকোণী ΔOEC এ, অতিভুজ $= OC$

$\therefore$ $OC^2 = CE^2 + OE^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $OC^2 = (\frac{1}{2}\ CD)^2 + OE^2$

বা, $OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OE^2$ .... (i).

আবার, P, AB জ্যা –এর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ $OP \perp$ জ্যা AB.

অর্থাৎ $\angle OPE = 90°$

সমকোণী ΔOEP এ অতিভুজ OE.

$\therefore$ $OE^2 = OP^2 + PE^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

(i) নং এ OE^2 এর মান বসিয়ে পাই, $OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OP^2 + PE^2$

বা, $\frac{CD^2}{4} = OC^2 - OP^2 - PE^2$

বা, $CD^2 = 4\ (OC^2 - OP^2 - PE^2)$

বা, $CD = 2\sqrt{OC^2 - OP^2 - PE^2}$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণে OC = বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং OP = O বিন্দু থেকে AB জ্যা–এর দূরত্ব অর্থাৎ OC এবং OP নির্দিষ্ট। কাজেই স্পষ্টত PE এর দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে CD এর মান তত বাড়বে।

EP হলো E এবং P এর মধ্যবর্তী দূরত্ব। কাজেই E যতই P এর নিকটবর্তী হবে EP এর দৈর্ঘ্য কমবে। ফলে CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকবে। (প্রমাণিত)

অনুশীলনী- ৮.২

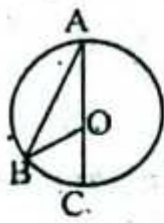
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ [পৃষ্ঠা- ১৩৮]

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ কর।

সমাধান : O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\ \angle BAC$।

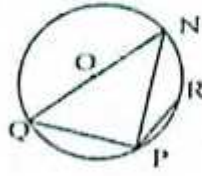
প্রমাণ।

ধাপ	যথার্থতা
i. ΔAOB এ $OA = OB$ $\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA$	[ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
ii. ΔAOB এর বহিঃস্থ $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$ $\therefore \angle BOC = \angle OAB + \angle OAB$ $= 2\angle OAB$ $\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$ [প্রমাণিত]	[ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

কাজ [পৃষ্ঠা- ১৩৯]

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

সমাধান : সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

বিশেষ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের QPR চাপটি একটি উপচাপ। Q, P ও P, R যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে, ∠QPR একটি স্থূলকোণ।

অঙ্কন : QN ব্যাস আঁকি। P, N যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ	যথার্থতা
১। ∠QPN একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। ∴ ∠QPN = এক সমকোণ।	[এটি অর্ধবৃত্তের উপর অবস্থিত]
২। ∠QPN < ∠QPR ∴ ১ সমকোণ ∠QPN, ∠QPR ∴ ১ সমকোণ < ∠QPR < ২ সমকোণ ∴ ∠QPR একটি স্থূলকোণ। [প্রমাণিত]	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ] [∠QPN, ∠QPR এর একটি অংশ] [১ নং হতে] [∠QPR সরলরৈখিক কোণের অংশ]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.২

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.

বিশেষ নির্বচন ঃ ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB.

অংকন ঃ O, A; O, B; O, C ও O, D যোগ করি।

প্রমাণ ঃ একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ∠AOB এবং পরিধিস্থ ∠ADB।

∴ ∠AOB = 2 ∠ADB .... (i)

আবার, চাপ CD এর উপর ∠COD কেন্দ্রস্থ এবং ∠DAC পরিধিস্থ।

∴ ∠COD = 2 ∠DAC -------------- (ii)

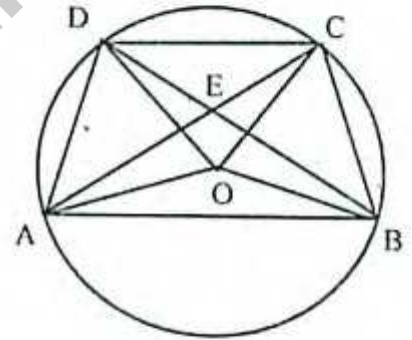
এখন, (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

∠AOB + ∠COD = 2 ∠ADB + 2∠DAC

বা, ∠AOB + ∠COD = 2 (∠ADB + ∠DAC)

= 2 (∠ADE + ∠DAE)

= 2 ∠AEB [∵ ∠AEB, Δ ADE-এর বহিঃস্থ কোণ]

∴ ∠AOB + ∠COD = 2 ∠AEB. (প্রমাণিত)

২। ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

বিশেষ নির্বচন ঃ দেওয়া আছে ABCD বৃত্তে AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করা হলে যথাক্রমে ΔAED এবং ΔBEC পাওয়া যায়।

দেখাতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

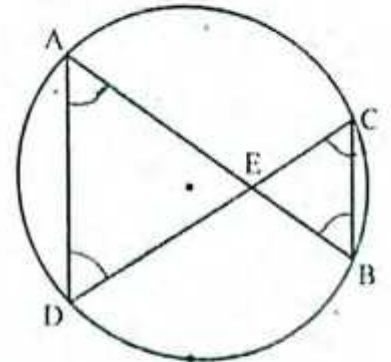
প্রমাণ ঃ আমরা জানি, বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

এখন, একই চাপ BD এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠BAD এবং ∠BCD.

∴ ∠BAD = ∠BCD

অর্থাৎ, ∠EAD = ∠ECB

আবার, একই চাপ AC এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠ADC এবং ∠ABC.

∴ ∠ADC = ∠ABC

অর্থাৎ, $\angle ADE = \angle CBE$

এখন, ΔAED এবং ΔBEC এ

$\angle EAD = \angle ECB$;

$\angle ADE = \angle CBE$

এবং $\angle AED = \angle BEC$ [∵ বিপ্রতীপ কোণ]

অর্থাৎ ΔAED এবং ΔBEC সদৃশকোণী। (প্রমাণিত)

। **O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।**

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

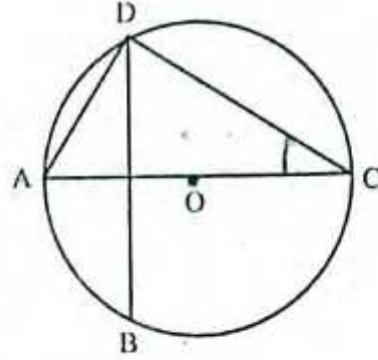
বিশেষ নির্বচন ঃ দেয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ যেহেতু, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ

অর্থাৎ, $\angle ADC$ = এক সমকোণ

∴ $\angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ [∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ]

∴ AC বৃত্তের ব্যাস এবং O তার কেন্দ্র

∴ A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)

। **AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।**

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$-এর দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন ঃ ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ADBC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করেছে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ। অর্থাৎ $\angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC$.

অঙ্কন ঃ A, D যোগ করি।

প্রমাণ ঃ BD চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং পরিধিস্থ $\angle BAD$ এবং AC চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ ও পরিধিস্থ $\angle ADC$.

সুতরাং $\angle BOD = 2\angle BAD$........................ (i) [কারণ কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ]

এবং $\angle AOC = 2\angle ADC$........................(ii)

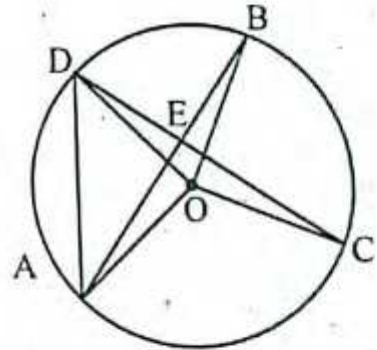
এখন, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$\angle BOD + \angle AOC = 2\angle BAD + 2\angle ADC$

∴ $\angle BOD + \angle AOC = 2(\angle BAD + \angle ADC)$

$= 2(\angle EAD + \angle ADE)$

$= 2\angle AEC$ [∵ $\angle AEC$, ΔADE এর বহিঃস্থ কোণ]

∴ $\angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC$. (প্রমাণিত)

। **দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।**

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ দেখাতে হবে যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও CD। সুতরাং তীর্যক বাহুদ্বয় হল AD ও BC।

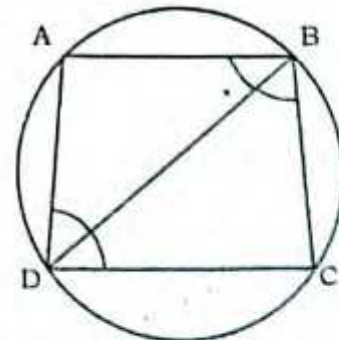
দেখাতে হবে যে, AD = BC

অঙ্কন ঃ B, D যোগ করি।

প্রমাণ ঃ ABCD ট্রাপিজিয়ামে,

$AB \parallel CD$ এবং BD ছেদক [কল্পনা অনুসারে]

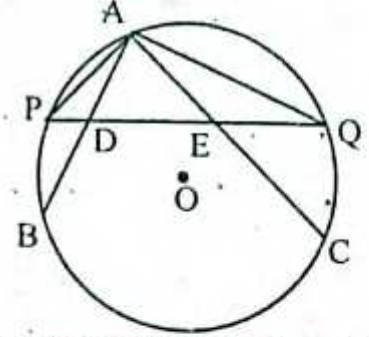
∴ $\angle ABD = \angle BDC$ [একান্তর কোণ]

বা, D চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ BC চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান।

বা, চাপ AD = চাপ BC [∵ বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]
বা, AD জ্যা = BC জ্যা [∵ বৃত্তে সমান সমান চাপ সমান জ্যা ছিন্ন করে]
∴ AD = BC (প্রমাণিত)

৬। AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AD = AE.

সমাধান: সাধারণ নির্বচন ঃ AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, AD = AE.

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও AC দুটি জ্যা। P, AB উপচাপের মধ্যবিন্দু এবং Q, AC উপচাপের মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-দ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, AD = AE.

A
P
D
E
Q
O
B
C

অঙ্কন ঃ A, P এবং A, Q যোগ করি।

প্রমাণ ঃ P, APB চাপের মধ্যবিন্দু।
∴ চাপ AP = চাপ BP
বা, বৃত্তস্থ ∠AQP = বৃত্তস্থ ∠BAP [∵ সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]
বা, ∠AQE = ∠PAD .... (i)
আবার, Q, AQC চাপের মধ্যবিন্দু।
∴ চাপ AQ = চাপ CQ.
বা, বৃত্তস্থ ∠APQ = বৃত্তস্থ ∠CAQ [সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]
বা, ∠APD = ∠EAQ
বা, ∠EAQ = ∠APD .... (ii)
এখন, (i) + (ii) নং থেকে পাই, ∠AQE + ∠EAQ = ∠PAD + ∠APD .... (iii)
AD রশ্মির প্রান্ত বিন্দুতে D তে PE সরলরেখা মিলিত হয়েছে।
ফলে, ∠ADP এবং ∠ADE সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।
∴ ∠ADP + ∠ADE = দুই সমকোণ
আবার, ΔAPD এ, এবং বহিঃস্থ ∠ADE, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত ∠APD ও ∠PAD এর সমষ্টির সমান।
অর্থাৎ, ∠ADE = ∠APD + ∠PAD .... (iv).
অনুরূপে, ΔAQE এ, এর বহিঃস্থ ∠AED, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত ∠AQE ও ∠EAQ এর সমষ্টির সমান
অর্থাৎ, ∠AED = ∠AQE + ∠EAQ
= ∠PAD + ∠APD [(iii) নং থেকে]
= ∠ADE [(iv) নং থেকে]
∴ ∠AED = ∠ADE.
অর্থাৎ ΔADE এর ∠AED = ∠ADE
∴ AD = AE (প্রমাণিত) [∵ সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

অনুশীলনী- ৮.৩

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.৩

১। △ ABC এ ∠B ও ∠C এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ΔABC-এ ∠B ও ∠C এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন : ΔABC- এর ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং ∠B ও ∠C-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

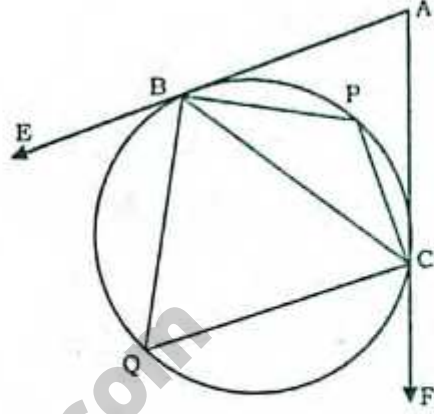
প্রমাণ : যেহেতু ∠ABC + ∠CBE = দুই সমকোণ

∴ ∠PBC + ∠CBQ = ∠PBQ = এক সমকোণ।

অনুরূপে, ∠PCB + ∠BCQ = ∠PCQ = এক সমকোণ।

∴ BPCQ চতুর্ভুজের ∠PBQ + ∠PCQ = দুই সমকোণ,

∴ BPCQ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। এর ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডক CE এবং ∠C-এর বিপরীত ∠A-এর বহির্দ্বিখণ্ডক AE পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দু বৃত্তস্থ অর্থাৎ বৃত্তের উপর ছেদ করে।

প্রমাণ : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায়,

∠BAD + ∠BCD = দুই সমকোণ।

কিন্তু F, A, B একই সরলরেখায় হওয়ায়,

∠FAD + ∠BAD = এক সরলকোণ = দুই সমকোণ।

সুতরাং, ∠BAD + ∠BCD = ∠FAD + ∠BAD

বা, ∠BCD = ∠FAD [উভয় পক্ষ থেকে ∠BAD বাদ দিয়ে]

বা, $\frac{1}{2}$ ∠BCD = $\frac{1}{2}$ ∠FAD

বা, ∠ECB = ∠EAD

এখন, ∠EAB + ∠ECB

= ∠EAD + ∠BAD + ∠ECB

= ∠ECB + ∠BAD + ∠ECB [∵ ∠EAD = ∠ECB]

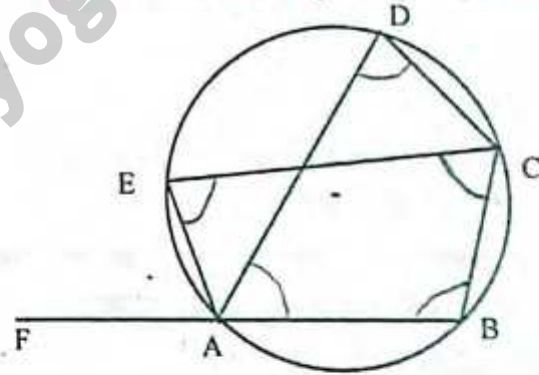
= ∠BAD + 2 ∠ECB

= ∠BAD + ∠BCD

= দুই সমকোণ

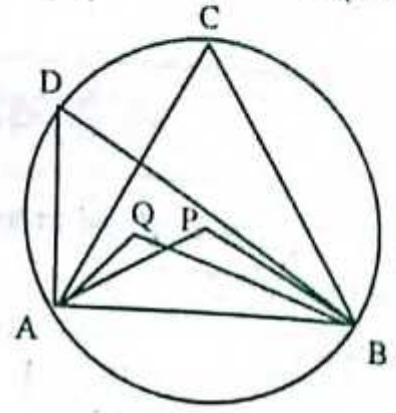
সুতরাং ∠EAB ও ∠ECB কোণদ্বয় বিপরীত এবং সম্পূরক হওয়ায়,

ABCE চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

∴ E বিন্দু বৃত্তস্থ। (প্রমাণিত)

৩। ABCD একটি বৃত্ত। ∠CAB এবং ∠CBA এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং ∠DBA ও ∠DAB কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABCD একটি বৃত্ত। ∠CAB এবং ∠CBA এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং ∠DBA ও

∠DAB কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। ∠CAB এবং ∠CBA এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং ∠DBA ও ∠DAB কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ ঃ ΔABC এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

ΔPAB এ $\angle P + \angle PAB + \angle PBA = 180°$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 180°$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

[উভয় পক্ষে $\frac{1}{2}\angle C$ যোগ করে]

∴ বা, $\angle P + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\ 180° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা $\angle P + 90° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা $\angle P = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

এরূপে ΔABD নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle Q = 90° + \frac{1}{2}\angle D$

AB একই চাপের উপর অবস্থিত বলে $\angle C = \angle D$

$\therefore \angle Q = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

সুতরাং, $\angle P = \angle Q$

এখন AB বৃত্তের চাপ এবং P ও Q বৃত্তস্থ কোণ। ∠P = ∠Q অর্থাৎ, বৃত্তস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হওয়ায় A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৪। **O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।**

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে যে কোনো বিন্দু P তে সমকোণে অর্থাৎ 90° কোণে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।

অঙ্কন ঃ DO কে বর্ধিত করি। এটি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ ঃ ∠DCE = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

আবার, ∠DPB = এক সমকোণ [কল্পনানুসারে]

∴ ∠DCE = ∠DPB

কিন্তু কোণ দুইটি অনুরূপ কোণ বলে, AB || CE

যেহেতু, সমান্তরাল সরলরেখা সমান চাপ উৎপন্ন করে

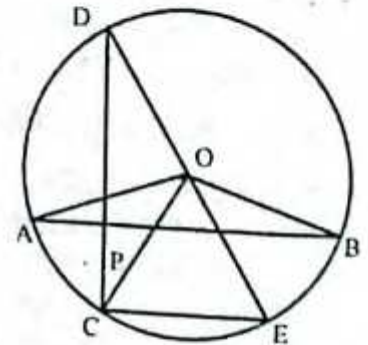
সেহেতু, AC চাপ = BE চাপ

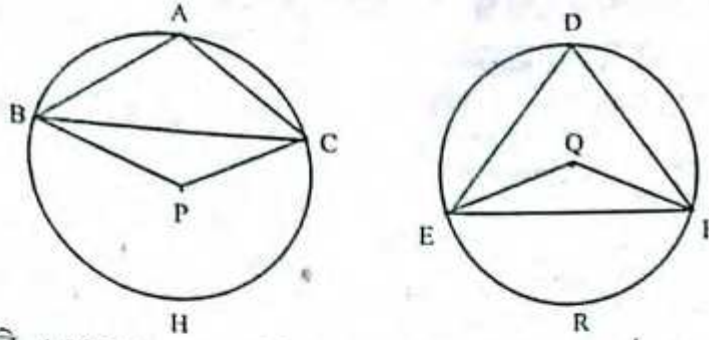
∴ ∠AOC = ∠BOE

এখন, ∠AOD + ∠AOC + ∠COE = এক সরলকোণ = দুই সমকোণ

বা, ∠AOD + ∠BOE + ∠COE = দুই সমকোণ

বা, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ

∴ ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

৫। সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF দুইটির ভূমি $BC = EF$, শিরঃকোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle D$। $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

প্রমাণ : P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BHC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BPC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$ বা $\angle A$

$\therefore \angle BPC = 2\angle A$

আবার, Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ERF চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle EQF$ এবং বৃত্তস্থ $\angle D$

$\therefore \angle EQF = 2\angle D$

সুতরাং, $\angle BPC + \angle EQF = 2\angle A + 2\angle D$

$= 2(\angle A + \angle D)$

$= 2 \times 2$ সমকোণ

$= 4$ সমকোণ।

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 4 সমকোণ এবং $BC = EF$ হওয়ায় BC দ্বারা ছিন্ন উপচাপ = EF দ্বারা ছিন্ন উপচাপ।

অর্থাৎ, BAC উপচাপ = ERF উপচাপ

এবং BHC অধিচাপ = EDF অধিচাপ।

অতএব, BAC চাপ + BHC চাপ = ERF চাপ + EDF চাপ

বা, ΔABC এর পরিবৃত্ত = ΔDEF এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৬। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BC = CD$.

অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। [$\because$ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে ইহার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]

AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ .... (i)

এখন, একই চাপ CD এর উপর বৃত্তস্থ $\angle DAC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DBC$.

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$ .... (ii) [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]

আবার, একই চাপ BC এর উপর বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং $\angle BDC$.

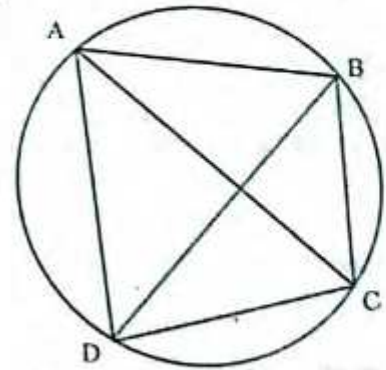
$\therefore \angle BAC = \angle BDC$ [ঐ একই কারণে]

বা, $\angle DAC = \angle BDC$ [(i) নং থেকে]

বা, $\angle DBC = \angle BDC$ [(ii) নং থেকে].

অর্থাৎ ΔBCD এর

$\angle BDC = \angle DBC$

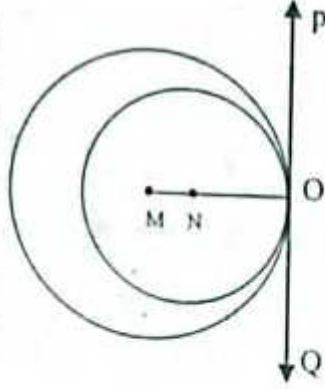
$\therefore BC = CD$ [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান] (প্রমাণিত)

অনুশীলনী- ৮.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : প্রমাণ কর যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে। [পৃষ্ঠা–১৪৫]

সমাধান : সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখা হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, M এবং N কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : O বিন্দুতে বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক POQ আঁকি এবং O, M ও O, N যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১। M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে POQ স্পর্শক এবং MO স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। MO ⊥ OP তদ্রূপ ON ⊥ OP	[অঙ্কনানুসারে] [বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।]
২। OM এবং ON উভয়ই POQ রেখার O বিন্দুতে লম্ব। ∴ OM এবং ON একই সরলরেখায় অবস্থিত। ∴ M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ। [প্রমাণিত]	[১ নং হতে]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.৪

১। **O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।**

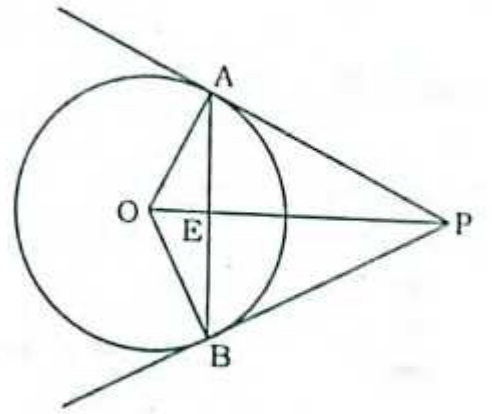
সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, OP সরলরেখা স্পর্শ–জ্যা এর লম্ব–দ্বিখণ্ডক।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, P, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P থেকে বৃত্তটির উপর PA ও PB দুইটি স্পর্শক টানা হল। অতএব, AB তার স্পর্শ জ্যা।

মনে করি OP, AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB কে E বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অঙ্কন ঃ O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ ঃ (১) ΔOAP এবং ΔOBP দ্বয়ের মধ্যে,

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$PA = PB$ [বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান বলে]

এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle AOP = \angle BOP$

অর্থাৎ, $\angle AOE = \angle BOE$

(২) ΔAOE এবং ΔBOE দ্বয়ের মধ্যে,

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\angle AOE = \angle BOE$ [পূর্বে প্রমাণিত]

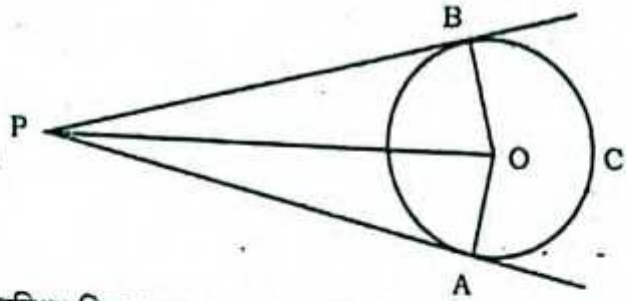
এবং OE সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $AE = BE$ অর্থাৎ E, AB এর মধ্যবিন্দু

এবং $\angle AEO = \angle BEO$
কিন্তু কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং একই সরলরেখায় অবস্থিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।
অর্থাৎ, $\angle AEO = \angle BEO$ = এক সমকোণ
$\therefore$ OE বা OP, AB এর উপর লম্ব।
$\therefore$ OP, AB কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (প্রমাণিত)

২। দেওয়া আছে, **O** বৃত্তের কেন্দ্র এবং **PA** ও **PB** স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে **A** ও **B** বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, **PO**, **∠APB** কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করতে হবে যে, PO, $\angle APB$ -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং এর বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক আঁকা হয়েছে। OP কেন্দ্র ও বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা এবং স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত $\angle APB$.
প্রমাণ করতে হবে যে, PO রেখা, $\angle APB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
অর্থাৎ $\angle APO = \angle BPO$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : OA এবং OB স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।
সুতরাং PA এবং PB যথাক্রমে OA এবং OB–এর উপর লম্ব
[$\because$ বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।]
সুতরাং $\angle PAO$ = এক সমকোণ।
এবং $\angle PBO$= এক সমকোণ।
এখন, ΔAOP এবং ΔBOP-এ $PA = PB$ [$\because$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।]
$\therefore OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PAO$ =অন্তর্ভুক্ত $\angle PBO$ [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ।]
$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$
সুতরাং $\angle APO = \angle BPO$
অর্থাৎ PO রেখা, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (প্রমাণিত)

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

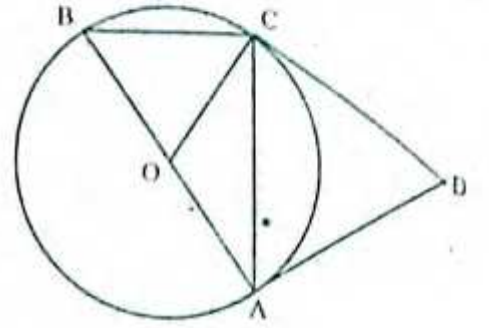
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC এবং PQR দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ABC বৃত্তটি বৃহত্তর। বৃহত্তর ABC বৃত্তের AB জ্যা–টি ক্ষুদ্রতর PQR বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, AB জ্যা–টি স্পর্শ বিন্দু P তে সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে অর্থাৎ P, AB জ্যা–এর মধ্যবিন্দু বা $PA = PB$.

অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : PQR বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক AB এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।
$\therefore AB \perp OP$
অর্থাৎ $\angle OPA = \angle OPB$ = এক সমকোণ।
[$\because$ বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব]
এখন, সমকোণী ΔOAP এবং সমকোণী ΔOBP এ,
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।
$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$
[$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অন্য একটি অনুরূপ বাহু পরস্পর সমান]
সুতরাং, $PA = PB$
অর্থাৎ P, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

৪। **AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।**

সমাধান: সাধারণ নির্বচন ঃ AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং AB তার ব্যাস। OB ব্যাসার্ধের সমান BC একটি জ্যা। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় AD ও CD পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A,C যোগ করায় ACD ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন ঃ O, C যোগ করি

$\therefore$ $\angle OBC = \angle OCB = 60^\circ$

সুতরাং, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলে]

বা, $\angle AOC = 60^\circ + 60^\circ$

$\therefore$ $\angle AOC = 120^\circ$

আবার, AO এবং OC স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়;

$\angle DAO$ = এক সমকোণ = $\angle DCO$

সুতরাং, ADCO চতুর্ভুজে $\angle A + \angle C$ = দুই সমকোণ

$\therefore$ $\angle ADC + \angle AOC = 180^\circ$

বা, $\angle ADC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

আবার, $AD = CD$ [$\because$ বহিঃস্থ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]

$\therefore$ $\angle ACD = \angle CAD$

এখন, $\triangle ADC$-এ, $\angle ADC = 60^\circ$

অপর কোণদ্বয় সমান হওয়ায় প্রত্যেকটি কোণ 60°

অতএব, $\triangle ACD$ সমবাহু। (প্রমাণিত)

৫। **প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।**

সমাধান: সাধারণ নির্বচন ঃ প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট PQRS বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD। AB, BC, CD ও DA–বাহুগুলো বৃত্তকে যথাক্রমে P,Q, R,S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O,A; O, B; O,C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$= দুই সমকোণ এবং $\angle AOB + \angle COD$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কন ঃ P, O; Q, O; R, O; S,O যোগ করি।

প্রমাণ ঃ যেহেতু A বিন্দু থেকে AP ও AS বৃত্তের দুইটি স্পর্শক।

$\therefore$ $AP = AS$

$\therefore$ $\angle AOS = \angle AOP$ ..... (i)

[$\because$ বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে কোনো বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।]

অনুরূপভাবে, $\angle DOS = \angle DOR$ -------- (ii)

$\angle COQ = \angle COR$ -------- (iii)

এবং $\angle BOQ = \angle BOP$ -------- (iv)

এখন, (i), (ii), (iii) ও (iv) নং যোগ করে পাই,

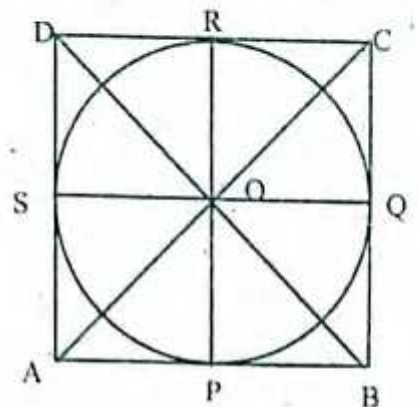
$\angle AOS + \angle DOS + \angle COQ + \angle BOQ = \angle AOP + \angle DOR + \angle COR + \angle BOP$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOP + \angle BOP + \angle DOR + \angle COR$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$

যেহেতু $(\angle AOD + \angle BOC) + (\angle AOB + \angle COD)$ = চার সমকোণ।

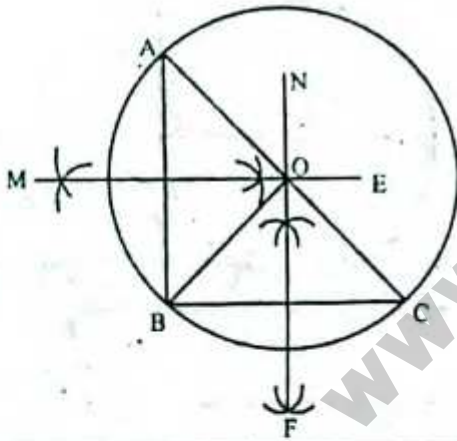
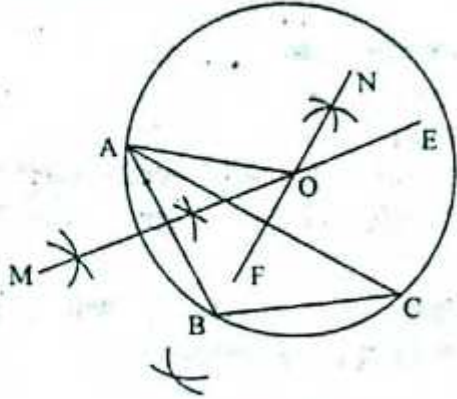
সুতরাং, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ

এবং $\angle AOB + \angle COD$= দুই সমকোণ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী- ৮.৫

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-৫: স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। [পৃষ্ঠা-১৪৭]

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ১নং চিত্রে স্থূলকোণী ত্রিভুজ এবং ২নং চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১। AB ও BC রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

২। B, O যোগ করি। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি Q, B ও C বিন্দু দিয়ে গেল। এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : O, A এবং O, C যোগ করি।

O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OB$

তদ্রূপ, $OB = OC$

$\therefore OA = OB = OC$

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে।

$\therefore$ এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

লক্ষণীয় যে, সুক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অভ্যন্তরে, স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্ভাগে এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র অতিভুজের ওপর অবস্থিত।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৮.৫

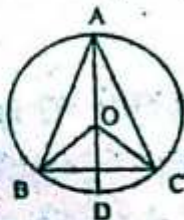
১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব
ii. অর্ধবৃত্তস্থ কোনো এক সমকোণ
iii. বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্র অনুযায়ী ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

২। $\angle BOD$ এর পরিমাণ হবে–

ক $\frac{1}{2}\angle BAC$ খ $\frac{1}{2}\angle BAD$
গ $\frac{1}{2}\angle BAC$ ঘ $\frac{1}{2}\angle BAD$

উত্তর : ঘ) $2\angle BAD$

৩। বৃত্তটি ABC ত্রিভুজ –

ক অন্তর্বৃত্ত খ পরিবৃত্ত
গ বহিঃবৃত্ত ঘ উপবৃত্ত

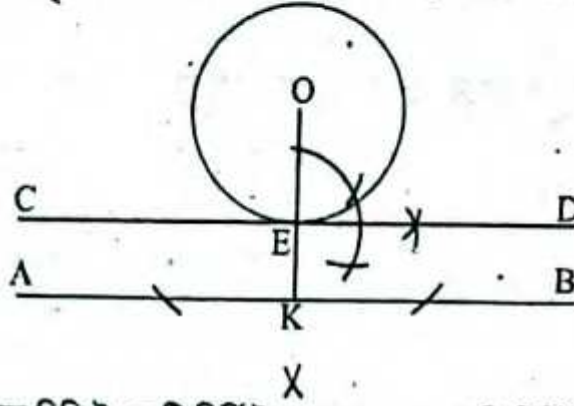
উত্তর : খ) পরিবৃত্ত

৪। কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ–

ক সূক্ষ্মকোণ খ সমকোণ
গ স্থূলকোণ ঘ পূরককোণ

উত্তর : ক) সূক্ষ্মকোণ

৫। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা দেয়া আছে। বৃত্তটিতে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা AB সরলরেখার সমান্তরাল।

অঙ্কন : O বিন্দু থেকে AB এর উপর OK লম্ব আঁকি।

মনে করি, অঙ্কিত লম্ব বৃত্তটিকে E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। E বিন্দুতে CD লম্ব আঁকি। এখন CD । । AB ।

সুতরাং CD-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

৬। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এ বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা AB এর উপর লম্ব হয়।

অঙ্কন : AB এর উপর E একটি বিন্দু নেই। O, E যোগ করি। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল POR টানি। POR বৃত্তের পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, R বিন্দুতে CD স্পর্শক আঁকি। তাহলে CD-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

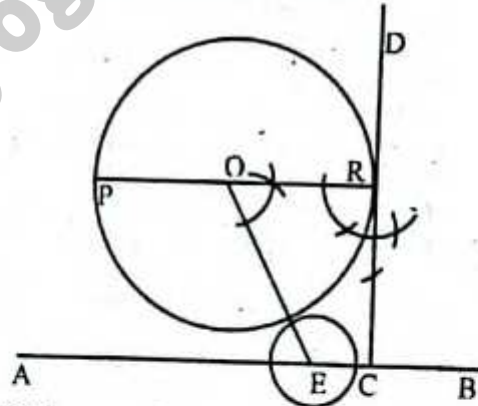
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে PR || AB

$\therefore \angle PRC = \angle RCB$ [একান্তর কোণ বলে]

কিন্তু, CR স্পর্শক হওয়ায় $\angle PRC$ = এক সমকোণ

সুতরাং, $\angle RCB$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ RC, AB এর উপর লম্ব।

অতএব, RC বা CD উদ্দিষ্ট স্পর্শক। (প্রমাণিত)

৭। কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এরূপ দু'টি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

অঙ্কন : OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই। $\angle AOB = 120°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটির সাথে B বিন্দুতে মিলিত হয়। OB রেখার উপর B বিন্দুতে এবং OA রেখার ওপর A বিন্দুতে দু'টি লম্ব টানি। মনে করি, এই লম্ব রশ্মিদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle ACB=60°$

প্রমাণ : চতুর্ভুজ OACB এর, $\angle AOB = 120°$ [অঙ্কন অনুসারে]

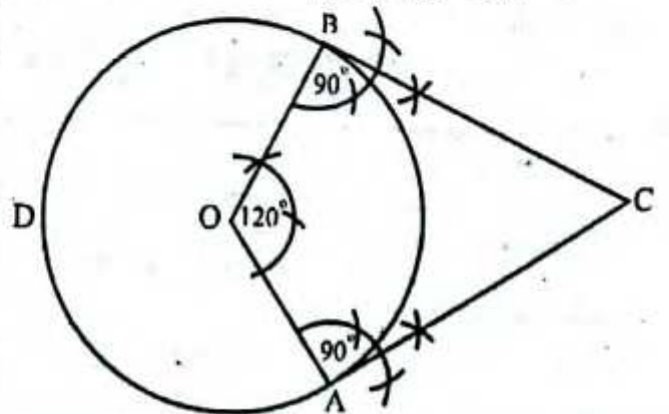
$\angle OBC = 90°$ [$\because OB \perp BC$]

এবং $\angle OAC = 90°$ [$\because OA \perp AC$]

এখন, চতুর্ভুজ OACB এর,

$\angle ACB + \angle AOB + \angle OAC + \angle OBC = 360°$ [$\because$ চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি 360°]

বা, $\angle ACB + 120° + 90° + 90° = 360°$

বা, $\angle ACB = 360° - 300°$

$\therefore \angle ACB = 60°$

আবার, প্রদত্ত বৃত্তের OB ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ B বিন্দুতে $BC \perp OB$

$\therefore$ BC স্পর্শক।

তদ্রূপ, প্রদত্ত বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ A বিন্দুতে $AC \perp OA$.

$\therefore$ AC স্পর্শক।

অতএব, AC ও BC–ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$. (প্রমাণিত)

৮। 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ 3 সে. মি., 4 সে. ও মি, 4.5 সে. মি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC = 4.5 সে. মি, AB = 4 সে. মি. এবং AC = 3 সে.মি.।

ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং তিনটি ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন ঃ AB ও AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখা আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। পরিশেষে O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ A, O; B, O এবং C, O যোগ করি।

O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

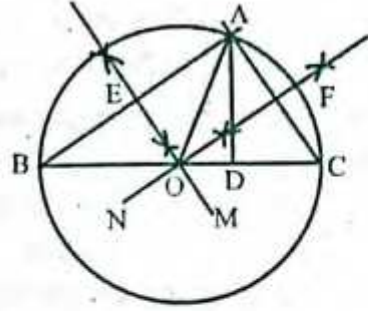
$\therefore$ OA = OB, একইভাবে, OA = OC

$\therefore$ OA = OB = OC

সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

ব্যাসার্ধ নির্ণয় ঃ অঙ্কন শেষে স্কেল দিয়ে OA এর দৈর্ঘ্য মেপে নিলাম। OA = 2.75 সে. মি. পাওয়া গেল।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 2.75 সে. মি.।

৯। 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন ঃ 5 সে. মি, বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর CA বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি.। এই ত্রিভুজের CA বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন ঃ BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle DCA$ এবং $\angle FAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CM ও AN রশ্মি আঁকি এবং মনে করি, তারা E বিন্দুতে ছেদ করে। E থেকে AC এর উপর EH লম্ব আঁকি। পরিশেষে E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ E হতে BD ও BF এর উপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি।

E বিন্দুটি $\angle DCA$ এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

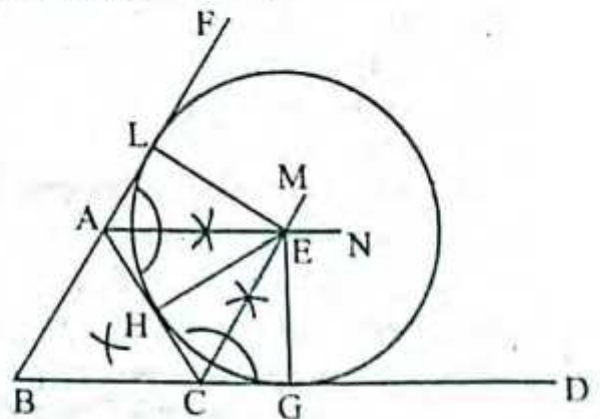
$\therefore$ EH = EG, একইভাবে, EH = EL

$\therefore$ EH = EG = EL

সুতরাং, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর একটি প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে CA, CD এবং AF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং, বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, HGL বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হবে। (প্রমাণিত)

১০। একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গ। এই বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন : A, C এবং B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে AB এর উপর OE লম্ব টানি। O কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করে।

তাহলে, EFGH –ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার, O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এই বৃত্ত ABCD বর্গের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : যেহেতু বর্গের কর্ণ ইহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং O বিন্দু হতে AB, BC, CD, DA বাহুর দূরত্ব (লম্বদূরত্ব) সমান।

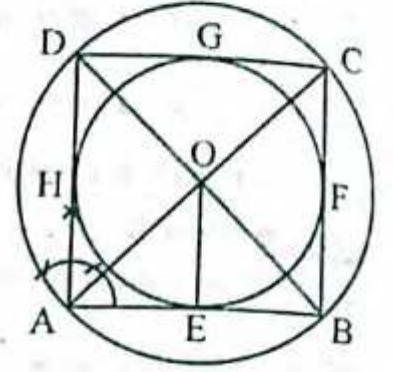
যেহেতু, O কে কেন্দ্র করে OE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি AB, BC, CD, DA বাহুকে স্পর্শ করবে।

অতএব, EFGH–ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার, বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, OA = OB = OC = OD

সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D বিন্দু দিয়ে যায়।

অতএব, ABCD–ই নির্ণেয় পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

১১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমদ্বিবাহু ΔABC এর ভূমি BC এবং AB = AC. AB এবং AC কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত আঁকা হল। বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, D, BC এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : AB বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তটি D বিন্দু দিয়ে যায়।

∴ $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

অর্থাৎ $\angle ADB$ = 1 সমকোণ

আবার, AC বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তটি D বিন্দু দিয়ে যায়।

∴ $\angle ADC$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

অর্থাৎ $\angle ADC$ = 1 সমকোণ

∴ $\angle ADB + \angle ADC$

= 1 সমকোণ + 1 সমকোণ

= 2 সমকোণ।

$\angle ADB$ এবং $\angle ADC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ। সুতরাং কোণদ্বয়ের বহিঃস্থ বাহু যথাক্রমে BD এবং CD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

∴ B, D, C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

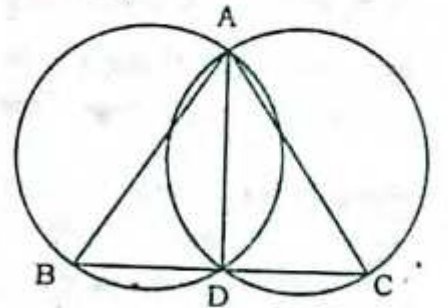
এখন সমকোণী ΔABD এবং ΔACD এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [কল্পনানুসারে] এবং, AD সাধারণ বাহু।

∴ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং একটি বাহু সমান]

সুতরাং, BD = CD

যেহেতু D, BC সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু এবং BD = CD

সেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

১২। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী ΔABC এর $\angle ACB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AB এবং O অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু। অতিভুজের বিপরীত শীর্ষবিন্দু C এবং OC যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, $OC = \frac{1}{2}$ AB.

অঙ্কন : O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ তথা AB কে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত আঁকি।

প্রমাণ : বৃত্তের ব্যাস = AB [অঙ্কন অনুসারে]

এবং, $\angle ACB$ = এক সমকোণ [কল্পনানুসারে]

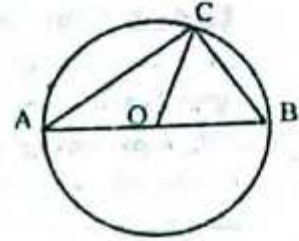
$\therefore$ $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

সুতরাং, C বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত বা বৃত্তস্থ বিন্দু।

এখন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তে, OA = OB = OC [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

আবার, AB = OA + OB

বা, AB = OC + OC বা, AB = 2OC

$\therefore$ $OC = \frac{1}{2}$ AB. (প্রমাণিত)

১৩। ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : ABD বৃত্তে, AB ব্যাস এবং $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ $\angle ADB$ = 1 সমকোণ

আবার, AD রশ্মির প্রান্তবিন্দু D-তে BC সরলরেখা মিলিত হয়েছে। ফলে $\angle ADB$ এবং $\angle ADC$ সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$\therefore$ $\angle ADB + \angle ADC$ = 2 সমকোণ।

বা, $\angle ADC$ = 2 সমকোণ – $\angle ADB$

বা, $\angle ADC$ = 2 সমকোণ – 1 সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ADC$ = 1 সমকোণ

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

সুতরাং, $\angle ADC$ এমন একটি বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ যার ব্যাস AC।

সুতরাং AC ব্যাস দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে। (প্রমাণিত)

১৪। AB ও CD একই বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, চাপ AC = চাপ BD.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : AB ও CD একই বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AC = চাপ BD.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABDC বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা AB ও CD. প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AC = চাপ BD.

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

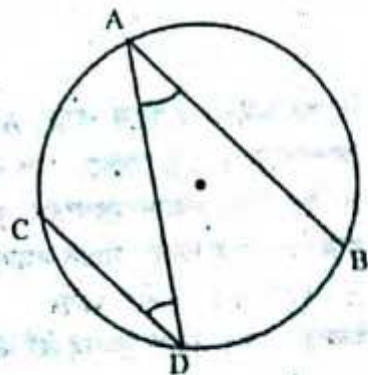
প্রমাণ : AB ।। CD, AD উহাদের ছেদক।

$\therefore$ $\angle BAD$ = একান্তর $\angle ADC$.

কিন্তু এরা ABDC বৃত্তে যথাক্রমে BD ও AC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ।

আমরা জানি, যেসব চাপ বৃত্তে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তারা পরস্পর সমান।

$\therefore$ চাপ BD = চাপ AC.

সুতরাং, চাপ AC = চাপ BD. (প্রমাণিত)

১৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

বিশেষ নির্বচন ঃ দেয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, D; O, B ও O, C যোগ করা হল। AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

অঙ্কন ঃ A, D এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ ঃ বৃত্তের AC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$.

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$

বা, $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$ ....(i)

আবার, বৃত্তের BD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

$\therefore \angle BOD = 2\angle DAB$

বা, $\angle DAB = \frac{1}{2} \angle BOD$ ....(ii)

এখন, ΔADE-এ,

$\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = 2$ সমকোণ............(iii)

AE রশ্মির প্রান্ত বিন্দু E, CD সরলরেখায় মিলিত হয়েছে।

ফলে $\angle AED$ এবং $\angle AEC$ সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$\therefore \angle AED + \angle AEC = 2$ সমকোণ..........................(iv)

এখন, (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

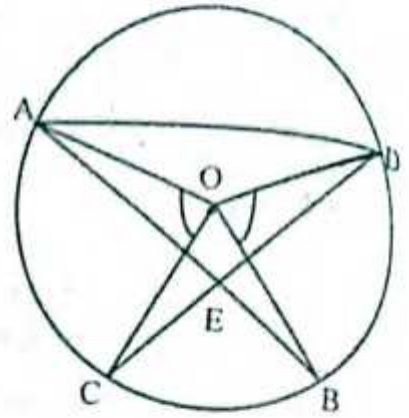
$\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = \angle AED + \angle AEC$

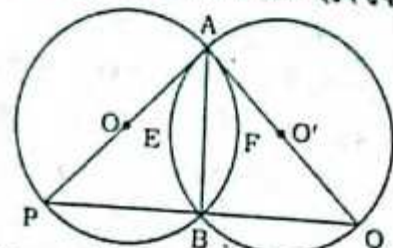
বা, $\angle ADE + \angle DAE = \angle AEC$ [উভয়পক্ষ থেকে $\angle AED$ বাদ দিয়ে]

বা, $\angle ADC + \angle DAB = \angle AEC$

বা, $\angle AEC = \angle ADC + \angle DAB$

বা, $\angle AEC = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOD$ [(i) এবং (ii) নং এর সাহায্যে]

$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. (প্রমাণিত)

১৬। দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা **AB**। **B** বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে **P** ও **Q** বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, **ΔPAQ** সমদ্বিবাহু।

সমাধান ঃ সাধারণ নির্বচন ঃ দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, APB ও AQB দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত। বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র O ও O'। বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং AB বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে।

$\therefore$ চাপ AEB = চাপ AFB

আবার, সমান সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

সমান সমান চাপ AFB এবং AEB এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে, $\angle APB$ এবং $\angle AQB$

সুতরাং, $\angle APB = \angle AQB$

বা, $\angle APQ = \angle AQP$

এখন, ΔPAQ-এ

$\angle APQ = \angle AQP$

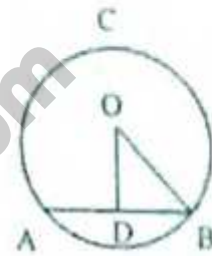
$\therefore AP = AQ$ [$\because$ সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান]

$\therefore \Delta PAQ$ সমদ্বিবাহু। (প্রমাণিত)

২১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা $AB = x$ সে.মি. $OD \perp AB$ পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক) বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

গ) $OD = \left(\frac{x}{2} - x\right)$ সে.মি. হলে x মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = r = 10$ cm

আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$= 3.1416 \times (10)^2$

$= 3.1416 \times 100$

$= 314.16$ বর্গ সে.মি.

অতএব, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল 314.16 বর্গ সে.মি.।

খ) O, A যোগ করি, যেহেতু OD, AB এর উপর লম্ব।

$\therefore \angle ODA = \angle ODB =$ এক সমকোণ।

অতএব ΔODA ও ΔODB উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

এখন, ΔODA এবং ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে।]

এবং OD বাহু সাধারণ

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$

অতএব $AD = BD$

যেহেতু $AD = BD$

$\therefore$ D, AB এর মধ্যেবিন্দু (দেখানো হলো)।

গ) ABC বৃত্তে ব্যাসার্ধ $OB = r = 10$ cm এবং $AB = x$ দেওয়া আছে। AB এর উপর OD লম্ব ফলে, OBD একটি সমকোণী ত্রিভুজ হলো। $AB = x$ তাহলে, $BD = \frac{x}{2}$ [খ হতে]

এখন, OBD সমকোণী ত্রিভুজের থেকে পীথাগোরাসের সূত্র হতে পাই,

$OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $(10)^2 = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ [যেহেতু $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$]

বা, $100 = \frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + 2^2 + \frac{x^2}{4}$

বা, $100 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

বা, $100 = \frac{2x^2}{4} - 2x + 4$

বা, $\frac{2x^2}{4} - 2x + 4 = 100$

বা, $\frac{2x^2}{4} - 2x + 4 - 100 = 0$

বা, $\frac{x^2}{2} - 2x - 96 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$

বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$

বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$

বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$

$x - 16 = 0$ অথবা, $x + 12 = 0$

$\therefore x = 16$ $\therefore x = -12$, যা গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং x এর নির্ণেয় মান 16 সে.মি.

১৮। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.।
উপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

সমাধান :

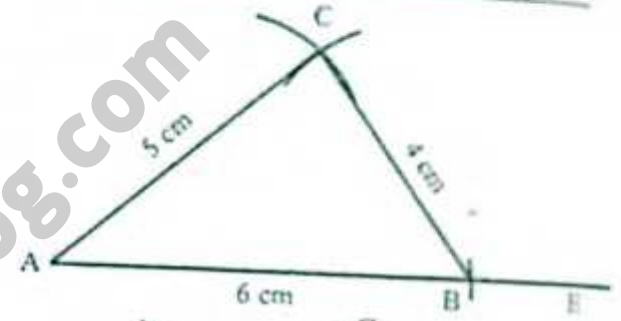
ক) মনেকরি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4cm, b = 5cm এবং c = 6cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আকতে হবে।

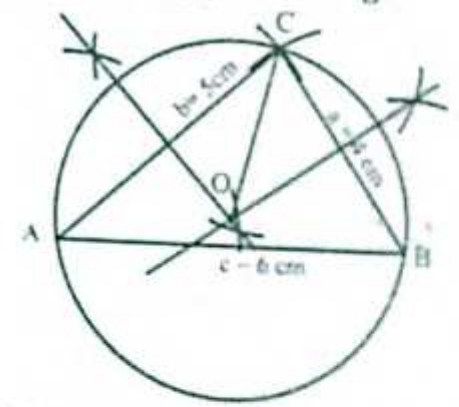
a 4 সে.মি.

b 5 সে.মি.

c 6 সে.মি.

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি AE নেই, AE থেকে c = 6 cm সমান করে AB অংশ কাটি। এখন AB এর A ও B কে কেন্দ্র করে AB এর একই পাশে b ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ) ABC একটি ত্রিভুজ যার পরিবৃত্ত আকতে হবে।

অঙ্কন :

ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করে বর্ধিত করলে তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O, B যোগ করি। এখন OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। যা নির্ণেয় ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত হলো।

গ) ABC বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু P এবং PM ও PN রেখাদ্বয় বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক। দেখাতে হবে স্পর্শক দ্বারা দূরত্ব অর্থাৎ PM = PN

অঙ্কন : OM ও ON যোগকরি এবং O, P যোগ করি।

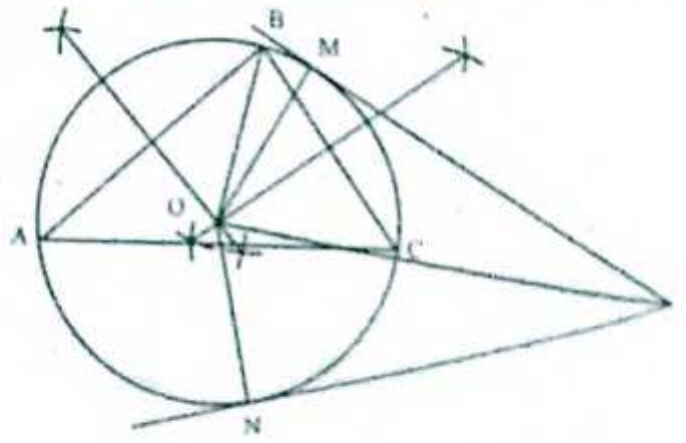
প্রমাণ : PM ও PN স্পর্শক এবং OM ও ON যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ

$\therefore \angle PMO = \angle PNO$ = একসমকোণ।

এখন ΔPOM ও PON সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ PO সাধারণ বাহু।

এবং OM = ON

$\therefore \Delta POM \cong \Delta PON$

= (দেখানো হলো)

অধ্যায় ৯ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা

- সূক্ষ্মকোণে [illegible] ত্রিকো[illegible] বর্ণনা করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণে [illegible] ত্রিকোণ[illegible]তগুলো[illegible]
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে 30°, 45°, 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

i. $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ ii. $\boxed{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$

মন্তব্য : পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $(\sin^n\theta)$, $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

iii. $\boxed{\sec^2\theta + \tan^2\theta = 1}$ iv. $\boxed{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$

v. $\boxed{\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 1}$ vi. $\boxed{\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1}$

গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলির প্রমাণ

(i) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

প্রমাণ : বামপক্ষ $= \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$= \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$

$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$

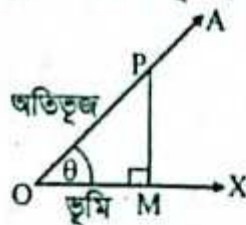
$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2}$

কিন্তু POM সমকোণী ত্রিভুজে OP অতিভুজ।

সুতরাং $OP^2 = PM^2 + OM^2$

[∵ OPM সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজ² = লম্ব² + ভূমি²]

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \frac{OP^2}{OP^2}$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)

(ii) প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

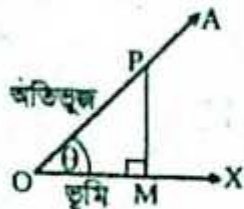
বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

প্রমাণ : বামপক্ষ $= (\sec\theta)^2$

$= \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

$= \frac{OP^2}{OM^2}$

$= \frac{PM^2 + OM^2}{OM^2}$

[∵ অতিভুজ² = লম্ব² + ভূমি²]

$= \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$

$= (\tan\theta)^2 + 1$ [∵ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\theta$]

$= 1 + \tan^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (প্রমাণিত)

(iii) প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

প্রমাণ : বামপক্ষ $= \text{cosec}^2\theta$

$= (\text{cosec}\theta)^2$

$= \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

$= \frac{OP^2}{PM^2}$

$= \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$

[∵ অতিভুজ² = লম্ব² + ভূমি²]

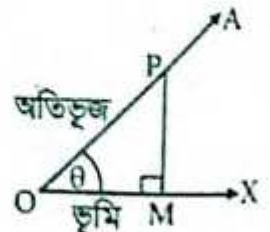
$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$

$= 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$

$= 1 + (\cot\theta)^2$ [∵ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \cot\theta$]

বা, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\therefore \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী- ৯.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

[পৃষ্ঠা- ১৫৩]

কাজ

১। θ ও φ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ করো।

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

সমাধান : উপরোক্ত সমকোণী ত্রিভুজসমূহে θ ও φ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু দেখানো হলো–

	θ কোণের জন্য	φ কোণের জন্য
(a)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ FD বিপরীত বাহু EF সন্নিহিত বাহু DE।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ DF বিপরীত বাহু DE সন্নিহিত বাহু EF।
(b)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 12 সন্নিহিত বাহু 9।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 9 সন্নিহিত বাহু 12।
(c)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু r সন্নিহিত বাহু e।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু e সন্নিহিত বাহু r।
(d)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু HI সন্নিহিত বাহু IJ।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু IJ সন্নিহিত বাহু HI।
(e)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 27 বিপরীত বাহু 36।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 36 বিপরীত বাহু 27।
(f)	(ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু b বিপরীত বাহু c।	(খ) φ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু c বিপরীত বাহু b।

[পৃষ্ঠা–১৫৩]

কাজ :

২। নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?

বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/ AC	AB/ AC	BC/ AB

সমাধান : প্রদত্ত চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সেন্টি. মিটারে মেপে সারণি পূরণ করা হলো এবং এদের অনুপাতগুলোর সম্পর্ক নির্ণয় করা হলো–

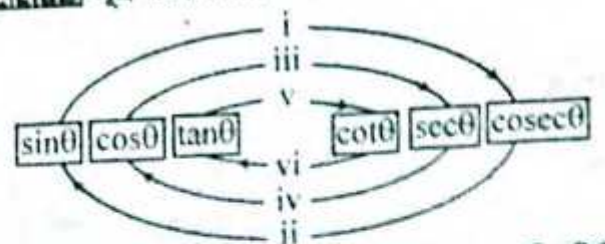
বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/ AC	AB/ AC	BC/ AB
1.8 cm	3 cm	3.5 cm	18/35	6/17	3/5
0.8 cm	1.3 cm	1.5 cm	8/15	13/15	8/13
3.7 cm	6 cm	7 cm	37/70	6/7	37/60
1 cm	1.8 cm	2 cm	1/2	9/10	5/9

[পৃষ্ঠা– ১৫৬]

কাজ :

৩। নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা তৈরি কর।

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec = \frac{1}{\cos\theta}$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

সমাধান : সূত্র মনে রাখার উপায় :

উপরের চিত্রটির তীর চিহ্ন ভালোভাবে লক্ষ করে নিম্নলিখিত সূত্রের তালিকা তৈরি করা হলো–

i) $\sin = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$	vii) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	viii) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
iii) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	ix) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
	x) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
iv) $\sec = \frac{1}{\cos\theta}$	xi) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
	xii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
v) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	xiii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
	xiv) $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$
vi) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	xv) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
	xvi) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
	xii) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

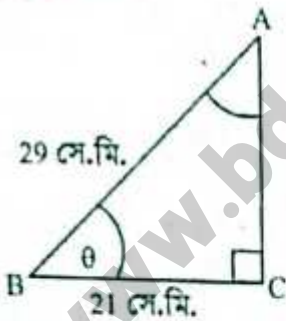
❑ **কাজ** [পৃষ্ঠা- ১৫৭]

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 29 সে.মি. এবং BC = 21 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 29 সে.মি., BC = 21 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$।

আমরা জানি, $\cos\angle ABC = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AB}$

বা, $\cos\theta = \frac{21}{29}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{441}{841}$

আবার, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841}$

প্রদত্ত রাশি : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{441}{841} - \frac{400}{841} = \frac{41}{841}$ (Ans.)

❑ **কাজ** [পৃষ্ঠা- ১৬০]

৫। $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4\theta + \cos^2 A = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\cos^4 A - \cot^2 A = 1$

এখন, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

বা, $\cot^4 A = 1 + \cot^2 A$

বা, $\cot^4 A = \operatorname{cosec}^2 A$

বা, $\frac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\frac{\cos^4 A}{\sin^2 A} = 1$ [উভয়পক্ষকে $\sin^2 A$ দ্বারা গুণ করে।]

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

❑ **কাজ** [পৃষ্ঠা- ১৬০]

৬। $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

এখন, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

বা, $\sin^4 A = 1 - \sin^2 A$

বা, $\sin^4 A = \cos^2 A$

বা, $\frac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^4 A}$ [উভয় $\cos^4 A$ পক্ষকে দ্বারা ভাগ করে]

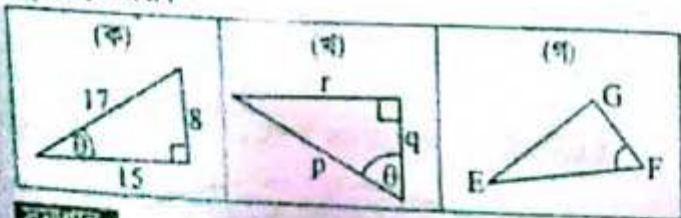
বা, $\tan^4 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

বা, $\tan^4 A = \sec^2 A$

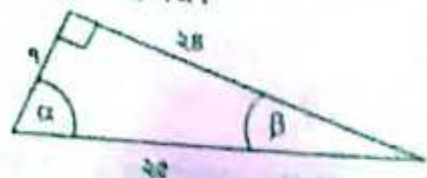
বা, $\tan^4 A = 1 + \tan^2 A$

$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ– ১। θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।

সমাধান :

(ক)	(খ)	(গ)
অতিভুজ 17 একক	[illegible] p	[illegible] EF
বিপরীত বাহু 8 একক	[illegible] বাহু r	[illegible] বাহু EG
সন্নিহিত বাহু 15 একক	সন্নিহিত বাহু q	সন্নিহিত বাহু FG

উদাহরণ– ২। α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) α কোণের জন্য	খ) β কোণের জন্য
[illegible]	অতিভুজ 25 একক
বিপরীত বাহু 24 একক	বিপরীত বাহু 7 একক
সন্নিহিত বাহু 7 একক	সন্নিহিত বাহু 24 একক

বামপক্ষ $= a^2 - b^2$

$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4 \tan A \sin A$ [...]

$= 4\sqrt{\tan^2 A \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A(1 - \cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A . \cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–১১। $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ... হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

দেওয়া আছে, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$

আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

বা, $\sec^2 - \tan^2 A = 1$

বা, $(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

বা, $\frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(i) হতে]

$\therefore \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৯.১

১। নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) tanA এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম।

সমাধান: tanA এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম এটা সত্য নয়। কারণ আমরা জানি, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ যেহেতু, বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা অঋণাত্মক, সুতরাং $\tan^2 A$ এর মান অঋণাত্মক হবে। এদের বিয়োগ ফল = 1 অতএব tanA এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। tanA এর মান +1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা −1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। অর্থাৎ তার মান হবে $(-1 \le \tan A \le 1)$.

খ) cotA হলো cot ও A এর গুণফল।

সমাধান: উক্তিটি সত্য নয়। কারণ cotA প্রতীকটি θ কোণের কোট্যানজেন্ট এর অনুপাতকে বোঝায় cot ও A এর গুণফলকে নয়। A বাদে cot আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

গ) A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$?

সমাধান: A এর যেকোনো মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$, উক্তিটি সত্য। কারণ : আমরা জানি, sec A হলো cosA–এর বিপরীত অনুপাত এবং cosA–এর মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা হতে পারে। তাই sec A এর মান 1 থেকে বড় যেকোনো সংখ্যা $\frac{12}{5}$ হতে পারে।

ঘ) Cos হলো Cotarigent এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান: বাক্যটি মিথ্যা, কারণ cos হলো সমকোণী ত্রিভুজের $= \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$

∴ Cos হলো cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

২। $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 3

এবং অতিভুজ = 4

∴ সন্নিহিত বাহু $= \sqrt{4^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16 - 9}$

$= \sqrt{7}$

$2 + \sqrt{3}$

সুতরাং $\cos A = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ $\cot A = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$

$\tan A = \frac{3}{2+\sqrt{3}}$ $\operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$

৩। দেওয়া আছে, 15 cotA = 8, SinA ও secA এর মান বের কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, 15 cotA = 8

বা $\cot A = \frac{8}{15}$

অতএব A কোণের বিপরীত বাহু = 15

সন্নিহিত বাহু = 8

∴ অতিভুজ $= \sqrt{15^2 + 8^2}$

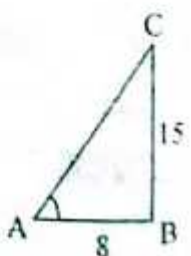
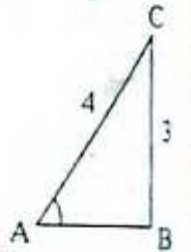
$= \sqrt{225 + 64}$

$= \sqrt{289}$

$= 17$

এখন, $\sin A = \frac{15}{17}$ এবং $\sec A = \frac{17}{8}$ (Ans.)

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠C সমকোণ, AB = 13 সে.মি. BC = 12 সে.মি. এবং ∠ABC = θ হলে, sinθ, cosθ ও tanθ এর মান বের কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠C = সমকোণ AB = 13 সে.মি.

$BC = 12$ সে.মি. $\angle ABC = \theta$

ΔABC-এ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = AB^2 - BC^2$

বা, $AC = \sqrt{13^2 - 12^2}$

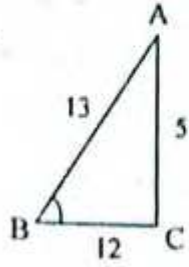
বা, $AC = \sqrt{169 - 144}$

বা, $AC = \sqrt{25}$

$\therefore AC = 5$ সে.মি.

এখন, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$

$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ **(Ans.)**

৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান :
মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 1$ সমকোণ
$\angle BAC = A$, $\tan A = \sqrt{3}$
প্রমাণ করতে হবে যে,

$\sqrt{3}\sin A \cos A = \frac{3}{4}$

এখন, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$

$\therefore BC = \sqrt{3}$ এবং $AB = 1$

আমরা জানি, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

$\therefore AC = 2$

$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ $= \sqrt{3}\sin A \cos A$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রমাণ কর যে, ৬–২০

৬। i) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}}$

$= \cos^2 A + \sin^2 A$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমানিত)

iii) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$ $[1 - \cos^2 A = \sin^2 A]$

$= 1 =$ R.H.S

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৭। i) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} A} + \cos A \cdot \frac{1}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \frac{1}{\cos A} - \tan A \cdot \frac{1}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \sec A - \tan A \cdot \tan A$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$ $[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমানিত)

iii) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$ $\left[\because \operatorname{cosec}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}\right]$

$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A}$

$= \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৮। i) $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A.\operatorname{cosec} A + 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A-\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{\cos A-\sin A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A(\cos A-\sin A)}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A\{-(\sin A-\cos A)\}}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)} - \frac{\cos^2 A}{\sin A(\sin A-\cos A)}$

$= \frac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$

$= \frac{(\sin A-\cos A)(\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A)}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$

$[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$

$= \frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)+\sin A\cos A}{\sin A.\cos A}$

$= \frac{1+\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

$= \frac{1}{\sin A\cos A} + \frac{\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

$= \frac{1}{\sin A}.\frac{1}{\cos A} + 1$

$= \operatorname{cosec} A.\sec A + 1$

$= \sec A.\operatorname{cosec} A + 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৯। $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$

$= \frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}} = \frac{\sin A}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A-\cos A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin A-\cos A} - \frac{\cos^2 A}{\sin A-\cos A}$

$= \frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin A-\cos A}$

$= \frac{(\sin A+\cos A)(\sin A-\cos A)}{(\sin A-\cos A)}$

$= \sin A + \cos A = R.H.S$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১০। $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A$

সমাধান : বামপক্ষ $= \tan A\sqrt{1-\sin^2 A}$

$= \tan A\sqrt{\cos^2 A}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A$

$= \sin A$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $\frac{\sec A+\tan A}{\operatorname{cosec} A+\cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A-\cot A}{\sec A-\tan A}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sec A+\tan A}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$

$= \frac{(\sec A+\tan A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\sec A-\tan A)}{(\operatorname{cosec} A+\cot A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\sec A-\tan A)}$

[লব ও হরকে $(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\sec A-\tan A)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sec^2 A-\tan^2 A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)}{(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)(\sec A-\tan a)}$

$= \frac{1\times(\operatorname{cosec} A-\cot a)}{1\times(\sec A-\tan A)}$

$= \frac{\operatorname{cosec} A-\cot A}{\sec A-\tan A} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১২। $\frac{\text{cosecA}}{\text{cosecA}-1}+\frac{\text{cosecA}}{\text{cosecA}+1}=2\sec^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\text{cosecA}}{\text{cosecA}-1}+\frac{\text{cosecA}}{\text{cosecA}+1}$

$=\frac{\text{cosecA}(\text{cosecA}+1)+\text{cosecA}(\text{cosecA}-1)}{(\text{cosecA}-1)(\text{cosecA}+1)}$

$=\frac{\text{cosec}^2A+\text{cosecA}+\text{cosec}^2A-\text{cosecA}}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2\text{cosec}^2A}{\cot^2A}$ $[\because \text{cosec}^2A-1=\cot^2A]$

$=2\text{cosec}^2A\times\frac{1}{\cot^2A}$

$=2\text{cosec}^2A.\tan^2A$

$=2\frac{1}{\sin^2A}\cdot\frac{\sin^2A}{\cos^2A}$

$=2\frac{1}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৩। $\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}=2\sec^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}$

$=\frac{1-\sin A+1+\sin A}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2A}$

$=\frac{2}{\cos^2A}$

$=2.\frac{1}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৪। $\frac{1}{\text{cosecA}-1}-\frac{1}{\text{cosecA}+1}=2\tan^2A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{1}{\text{cosecA}-1}-\frac{1}{\text{cosecA}+1}$

$=\frac{(\text{cosec A}+1)-(\text{cosecA}-1)}{(\text{cosecA}-1)(\text{cosecA}+1)}$

$=\frac{\text{cosecA}+1-\text{cosecA}+1}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\frac{2}{\cot^2A}$ $[\because \text{cosec}^2A-1=\cot^2A]$

$=2.\frac{1}{\cot^2A}$

$=2\tan^2A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৫। $\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\text{cosecA}$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}$

$=\frac{\sin^2A+(1-\cos A)^2}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{\sin^2A+1-2\cos A+\cos^2A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{(\sin^2A+\cos^2A)+1-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{1+1-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$ $[\because \sin^2A+\cos^2A=1]$

$=\frac{2-2\cos A}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{2(1-\cos A)}{\sin A(1-\cos A)}$

$=\frac{2}{\sin A}$

$=\frac{2}{\frac{1}{\text{cosecA}}}$ $[\because \sin A=\frac{1}{\text{cosecA}}]$

$=2\times\frac{\text{cosecA}}{1}$

$=2\text{cosecA}$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৬। $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\frac{\tan^2A-(\sec A-1)(\sec A+1)}{\tan A(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2A-(\sec^2A-1)}{\tan A(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2A-\tan^2A}{\tan A(\sec A+1)}$ $[\because \sec^2A-1=\tan^2A]$

$=\frac{0}{\tan A(\sec A+1)}$

$=0$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৭। $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin q}{1-\sin q}$

সমাধান : বামপক্ষ $=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

$=\left(\frac{\sin q}{\cos q}+\frac{1}{\cos q}\right)^2$

$=\left(\frac{\sin q+1}{\cos q}\right)^2$

$=\frac{(\sin q+1)^2}{\cos^2q}$

$=\frac{(1+\sin q)^2}{1-\sin^2q}$ $[\because \cos^2\theta=1-\sin^2\theta]$

$=\frac{(1+\sin q)^2}{(1)^2-\sin^2q}$

$=\frac{(1+\sin q)(1+\sin q)}{(1+\sin q)(1-\sin q)}$

$= \frac{1+\sin q}{1-\sin q}$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৮। $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A.\tan B$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\frac{\cos A.\cos B + \sin B.\sin A}{\sin A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B + \sin A\sin B}{\sin B.\cos A}}$

$= \frac{(\cos A.\cos B + \sin A.\sin B)}{\sin A\cos B} \times \frac{\sin B.\cos A}{(\cos A.\cos B + \sin A.\sin B)}$

$= \frac{\sin B.\cos A}{\sin A.\cos B}$

$= \frac{\sin B}{\cos B}.\frac{\cos A}{\sin A}$

$= \tan B.\cot A$

$= \cot A.\tan B$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৯। $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$

$= \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}} \times \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{1-\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

$= \frac{1-\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$ $[\because 1-\sin^2 A = \cos^2 A]$

$= \frac{1-\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২০। $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$= \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1}} \times \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A + 1}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1^2}}$

$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

$= \frac{\sec A + 1}{\sqrt{\tan^2 A}}$ $[\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$

$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$

$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

$= \sec A.\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

$= \sec A.\cot A + \cot A$

$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A$

$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$

$= \operatorname{cosec} A + \cot A$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A$

= ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২১। $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

সমাধান: এখানে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

বা, $\cos A = \frac{\sin A}{\sqrt{2}-1}$

বা, $\cos A = \frac{\sin A(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{2}+1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos A = \frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$

বা, $\cos A = \frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{2-1}$

বা, $\cos A = (\sqrt{2}+1)\sin A$

বা, $\cos A = \sqrt{2}\sin A + \sin A$

∴ $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$ (প্রমাণিত)

২২। যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot A = \frac{1}{\tan A}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{1}$

$= \sqrt{3}$

$\cot A = \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

$= \frac{(1 + \cot^2 A) - (1 + \tan^2 A)}{(1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A)}$

$= \frac{1 + \cot^2 A - 1 - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A}$

$= \frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A}$

$= \frac{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 + (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

[tanA এবং cotA এর মান বসিয়ে]

$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + 3 + \frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{9-1}{3}}{\frac{6+9+1}{3}}$

$= \frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}}$

$= \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

২৩। $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{4}{3}$

বা, $4(\operatorname{cosec} A + \cot A) = 3$

$\therefore \operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{3}{4}$ (Ans.)

২৪। $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখন, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$= \frac{a.\frac{\sin A}{\sin A} - b.\frac{\cos A}{\sin A}}{a.\frac{\sin A}{\sin A} + b.\frac{\cos A}{\sin A}}$

[লব ও হরকে sinA দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{a - b.\cot A}{a + b.\cot A}$

$= \frac{a - b.\frac{b}{a}}{a + b.\frac{b}{a}}$ [cotA এর মান বসিয়ে]

$= \frac{a - \frac{b^2}{a}}{a + \frac{b^2}{a}}$

$= \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{a^2 + b^2}{a}}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a}{a^2 + b^2}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (Ans.)

অনুশীলনী- ৯.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ [পৃষ্ঠা- ১৬৪]

১। $\sec(90° - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sec(90° - \theta) = \frac{5}{3}$

বা, $\text{cosec}\theta = \frac{5}{3}$

আমরা জানি, $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$

$\therefore \cot\theta = \frac{4}{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \text{cosec}\theta - \cot\theta$

$= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$

উত্তর : $\frac{1}{3}$

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{1 - \sin^2 45°}{1 + \sin^2 45°} + \tan^2 45°$

(খ) $\cot 90° . \tan 0° . \sec 30° . \text{cosec } 60°$

(গ) $\sin 60° . \cos 30° + \cos 60° . \sin 30°$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60°}{1 + \tan^2 60°} + \sin^2 60°$

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত রাশি $= \frac{1 - \sin^2 45°}{1 + \sin^2 45°} + \tan^2 45°$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (1)^2$

$[\because \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ও $\tan 45° = 1]$

$= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

(খ) প্রদত্ত রাশি $= \cot 90° . \tan 0° . \sec 30° . \text{cosec } 60°$

$= 0.0. \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

$[\because \cot 90° = 0, \tan 0° = 0, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}]$

(গ) প্রদত্ত রাশি $= \sin 60° . \cos 30° + \cos 60° . \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$[\because \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}]$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60°}{1 + \tan^2 60°} + \sin^2 60°$

$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1-3}{1+3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$

উদাহরণ ২।

(ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$, যদি $A = 45°$ হয়।

(ঘ) সমাধান কর : $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : (ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$

বা, $\cos(A - B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos(A - B) = \cos 45°$ $[\because \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore A - B = 45°$ .... (i)

এবং $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A + B) = \sin 60°$ $[\because \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore A + B = 60°$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2A = 105°$

$\therefore A = \frac{105°}{2} = 52\frac{1°}{2}$

আবার, (ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 15°$

বা, $B = \frac{15°}{2}$

$\therefore B = 7\frac{1°}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় $A = 52\frac{1°}{2}$ ও $B = \frac{1°}{2}$

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot A = \cot 60°$

$\therefore A = 60°$

(গ) দেওয়া আছে, $A = 45°$

প্রমাণ করতে হবে, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

বামপক্ষ $= \cos 2A$

$= \cos(2 \times 45°) = \cos 90° = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\sin^2\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2(1+\sin\theta)-3\} = 0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2\sin\theta - 1\} = 0$

বা, $1-\sin\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \sin\theta = 1$ বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin 90°$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 90°$ বা, $\sin\theta = \sin 30°$

বা, $\theta = 30°$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু $\theta = 30°$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ৯.২

১। $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) 1

গ) $\sqrt{3}$ ঘ) 2

উত্তর : ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

২. i. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

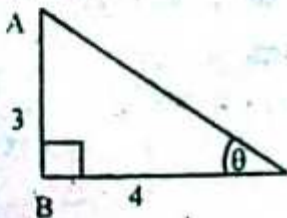
ii. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

iii. $\cot^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

পাশের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক ?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : ক. i ও ii.

চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। $\sin\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$ খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$ ঘ) $\frac{4}{3}$

উত্তর : গ) $\frac{3}{5}$

৪। $\cot\theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$ খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$ ঘ) $\frac{4}{3}$

উত্তর : ঘ) $\frac{4}{3}$

মান নির্ণয় কর (৫ – ৮)

৫। $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

$= \frac{1-(\cot 60°)^2}{1+(\cot 60°)^2}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

৬। $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

সমাধান : $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

$= 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$

$= 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1$

$= \frac{3}{4}$ (Ans.)

৭। $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

সমাধান : $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + (2)^2$

$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + 4$

$= \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}} + 4$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} + 4$

$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + 5$

$= \frac{3}{5} + 4$

$= \frac{3 + 20}{5}$

$= \frac{23}{5}$ (Ans.)

৮। $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60 \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

সমাধান : $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60 \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (2)^2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}}$ (Ans.)

দেখাও যে, (৯ – ১১)

৯। $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ [$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$]

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3-1}{4}$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

$= \cos 60^\circ$ [$\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$]

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১০। $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3+1}{4}$

$= \frac{4}{4}$

$= 1$

ডানপক্ষ $= \sin 90^\circ$ [$\because \sin 90^\circ = 1$]

$= 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হল)

১১। $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos 30^\circ$ [$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১২। $\sin 3A = \cos 3A$, যদি $A = 15^\circ$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 15^\circ$

এখন, বামপক্ষ $= \sin 3A$

$= \sin(3 \times 15^\circ)$

$= \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

আবার, ডানপক্ষ $= \cos 3A$

$= \cos(3 \times 15^\circ)$

$= \cos 45^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হল)

১৩। $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45°$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 45°$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin 2A$
$= \sin(2 \times 45°)$
$= \sin 90°$
$= 1$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
$= \frac{2\tan 45°}{1+\tan^2 45°}$
$= \frac{2\cdot 1}{1+(1)^2}$
$= \frac{2}{1+1}$
$= \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৪। $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 30°$

এখন, বামপক্ষ $= \tan 2A$
$= \tan(2 \times 30°)$
$= \tan 60°$
$= \sqrt{3}$

আবার, ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
$= \frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ [A এর মান বসিয়ে]
$= \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ [$\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]
$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$
$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}}$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}$
$= \sqrt{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৫। $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$, যদি $A = 60°$ হয়।

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 60°$

এখন, বামপক্ষ $= \cos 2A$
$= \cos(2 \times 60°)$
$= \cos(120°)$
$= \cos(90° + 30°)$
$= -\sin 30°$
$= -\frac{1}{2}$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
$= \frac{(\tan 60°)^2}{(\tan 60°)^2}$
$= \frac{1-(\sqrt{3})^2}{1+(\sqrt{3})^2}$
$= \frac{1-3}{1+3}$
$= \frac{-2}{4}$
$= \frac{-1}{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৬। $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°$ এবং $B = 15°$।

সমাধান : দেয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1$ এবং $2\sin(A-B) = 1$

এখন, $2\cos(A+B) = 1$
বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$
বা, $\cos(A+B) = \cos 60°$ [$\because \cos 60° = \frac{1}{2}$]
$\therefore$ $A + B = 60°$------------ (i)

আবার, $2\sin(A-B) = 1$
বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$
বা, $\sin(A-B) = \sin 30°$ [$\because \sin 30° = \frac{1}{2}$]
$\therefore$ $A - B = 30°$----------------(ii)

এখন, সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই,

$A + B = 60°$
$A - B = 30°$
$2A = 90°$
$\therefore$ $A = 45°$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$45° - B = 30°$
বা, $45° - 30° = B$
বা, $15° = B$
$\therefore$ $B = 15°$

সুতরাং $A = 45°$ এবং $B = 15°$ (দেখানো হলো)

১৭। $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos(A-B) = 1$
বা, $\cos(A-B) = \cos 0°$
$\therefore$ $A - B = 0°$ .... (i)

আবার, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin(A+B) = \sin 60°$

$\therefore A + B = 60°$ .... (ii)

(ii) নং ও (i) নং সমীকরণ যোগ ও বিয়োগ করে পাই,

$A + B = 60°$

$A - B = 0°$

(+) $2A = 60°$

বা, $A = \frac{60°}{2}$

$\therefore A = 30°$

এবং $A + B = 60°$

$A - B = 0°$

$2B = 60°$

বা, $B = \frac{60°}{2}$

$\therefore B = 30°$

অতএব নির্ণেয় মান $A = 30°$ এবং $B = 30°$ (Ans.)

১৮। সমাধান কর : $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

সমাধান : এখানে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A}$

$= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন ও বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$ [উভয়পক্ষকে (–) দিয়ে গুণ করে]

বা, $\cot A = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \cot 30°$ [$\because \sqrt{3} = \cot 30°$]

বা, $A = 30°$

$\therefore A = 30°$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $A = 30°$ (Ans.)

১৯। A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, $\cot(A+B) = 1$

বা, $\cot(A+B) = \cot 45°$ [$\because 1 = \cot 45°$]

$\therefore A + B = 45°$ ---------------(i)

আবার, দেয়া আছে, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$

বা, $\cot(A-B) = \cot 30°$ [$\because \cot 30° = \sqrt{3}$]

$\therefore A - B = 30°$------------(ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$A + B = 45°$

$A - B = 30°$

$\therefore 2A = 75°$

$\therefore A = \frac{75°}{2} = 37\frac{1}{2}°$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{75°}{2} - B = 30°$

বা, $\frac{75°}{2} - 30° = B$

বা, $\frac{75° - 60°}{2} = B$

বা, $B = \frac{15°}{2}$

$\therefore B = 7\frac{1}{2}°$

অতএব, নির্ণেয় মান, $A = 37\frac{1}{2}°$ এবং $B = 7\frac{1}{2}°$ (Ans.)

২০। দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান :

বামপক্ষ $= \cos 3A = \cos 3 \times 30° = \cos 90° = 0$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4\cos^3 30° - 3\cos 30°$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 4.\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ। (দেখানো হল)

২১। সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$ যখন $0° \le \theta \le 90°$

সমাধান : $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = 1 - \sin\theta$

বা, $\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2\theta = 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$

বা, $-2\sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$

বা, $-2\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

[উভয় পক্ষকে '– 2' দ্বারা ভাগ করে]

হয়, $\sin\theta = 0$ ----------------(i)

অথবা, $\sin\theta - 1 = 0$ ----------(ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin\theta = \sin 0°$

$\therefore \theta = 0°$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin 90°$

$\therefore \theta = 90°$

অতএব, নির্ণেয় মান $\theta = 0°, 90°$ (Ans.)

২২। সমাধান কর : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : এখানে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$

[$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ ....(i)

অথবা, $\cos\theta + 3 = 0$ ....(ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\cos\theta = -3$

কিন্তু সূক্ষ্মকোণের জন্য $\cos\theta = -3$ হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60^\circ$ **(Ans.)**

২৩। সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ = সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : $2\text{Sin}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ [– দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(\cos\theta - 1(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \cos0^\circ$

$\therefore \theta = 0^\circ$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

[যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ সেহেতু $\theta = 0^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60^\circ$ **(Ans.)**

২৪। সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

সমাধান : এখানে, $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan q - 1) = 0$

বা, $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\tan\theta - 1 = 0$ ....(i)

নতুবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ ....(ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\tan\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \tan 45^\circ$

অর্থাৎ, $\theta = 45^\circ$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan 60^\circ$

অর্থাৎ, $\theta = 60^\circ$।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 45^\circ$ ও 60° **(Ans.)**

২৫। মান নির্ণয় কর : $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\text{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$.

সমাধান : প্রদত্ত রাশি : $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\text{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$.

$= 3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot(2)2 + 5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot4 + 5\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{4}$

$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1$

$= 1 + \frac{5}{2}$

$= \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$

অতএব নির্ণেয় মান $= \frac{7}{2}$ **(Ans.)**

২৬। ΔABC এর $\angle B = 90^\circ$, AB = 5cm, BC = 12 cm.

ক AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos^2\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ দেখাও যে, $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

সমাধান :

ক) আমরা জানি,

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ

A
5 cm
90°
B
12 cm
C

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

বা, $AC = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

বা, $AC = \sqrt{25 + 144}$

বা, $AC = \sqrt{169}$

$\therefore AC = 13$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\angle C = \theta$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta$

$= \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$

$= \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$

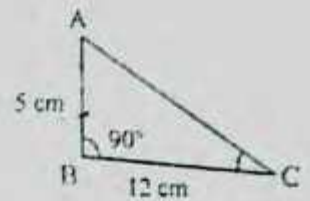
অতএব, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান $\frac{17}{13}$ **(Ans.)**

গ. **দেখাও যে, $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$**

সমাধান : আমরা জানি, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\frac{12}{13}} = 1 \times \frac{13}{12} = \frac{13}{12}$

এবং $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = 1 \times \frac{13}{5} = \frac{13}{5}$

বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144} + \frac{169}{25}$

$= \frac{4225 + 24336}{3600}$

$= \frac{28561}{3600}$

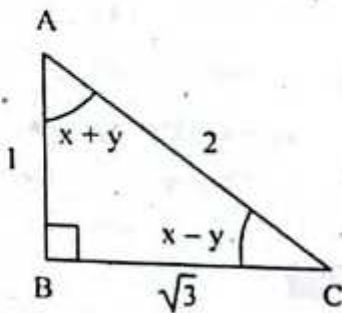
ডানপক্ষ $= \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 \times \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144} \times \frac{169}{25}$

$= \frac{28561}{3600}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

২৭।

ক AC এর পরিমাণ কত?

খ tanA + tanC এর মান নির্ণয় কর।

গ x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. ΔABC এ $\angle B = 90°$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

$AC = \sqrt{4}$

$\therefore AC = 2$

খ. $\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি $= \tan A + \tan C$

$= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

গ. $\tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \tan 30°$

$\therefore x - y = 30°$ ....(i)

আবার, $\tan A = \sqrt{3}$

বা, $\tan(x + y) = \tan 60°$

$\therefore x + y = 60°$ ....(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$x - y = 30°$

$x + y = 60°$

$2x = 90°$

$\therefore x = 45°$

(i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$x + y = 60°$

$x - y = 30°$

(−) (+) (−)

$2y = 30$

$\therefore y = 15°$

উত্তর : $x = 45°$ এবং $y = 15°$

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $1 + \sin^2 A + \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A} =$ কত?

[শহীদ বীর উত্তম লে. আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক $\cos^2 A$ খ $\sec^2 A$ গ $\sin^2 A$ ঘ $\operatorname{cosec}^2 A$ (খ)

২. $\sin A = 0$ হলে $\angle A$ কত?

[মৌলভীবাজার সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]

ক 0° খ 90° গ 60° ঘ 45° (ক)

৩. $\tan\theta =$ কোনটি? [ভিক্টোরিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

ক $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ খ গ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ ঘ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

৪. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ 1 গ $\sqrt{3}$ ঘ 2 (গ)

৫. $\frac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$ এর মান কত?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{2}{3}$ (খ)

৬. [... বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

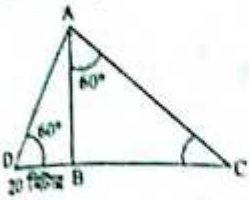
ক $\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$ গ 1 ঘ −1 (খ)

দূরত্ব ও উচ্চতা

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা —

- ভূ-রেখা, ঊর্ধ্বরেখা, উলম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে হাতে-কলমে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবে।

অনুশীলনী- ১০

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : [পৃষ্ঠা- ১৭৫]

চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তথ্য থেকে—

১. গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
২. গাছটির পাদদেশে থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছটির উচ্চতা, AB = h মিটার

BD = 20 মিটার

ΔABD এর ক্ষেত্রে,

উন্নতি কোণ $\angle ADB = 60°$

ΔABC-এর ক্ষেত্রে, $\angle BAC = 60°$

উন্নতি কোণ $\angle ACB = (90° - 60°) = 30°$

গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ BC এর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

ΔABD-এ

$\tan \angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{20}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{20}$

বা, $h = 20\sqrt{3} = 34.641$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছের উচ্চতা 34.641 মিটার (প্রায়)

আবার, ΔABC-এ

বা, $\tan \angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 30° = \frac{20\sqrt{3}}{BC}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{BC}$

বা, $BC = 20(\sqrt{3})^2$

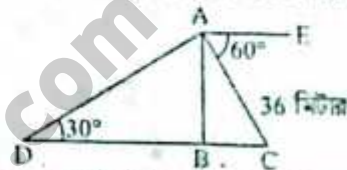
বা, $BC = 20 \times 3$

$\therefore BC = 60$

$\therefore$ দূরত্ব BC = 60 মিটার

উত্তর : গাছের উচ্চতা 34.641 (মিটার (প্রায়) এবং দূরত্ব 60 মিটার।

কাজ : [পৃষ্ঠা- ১৭৬]

১। চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60°$, উন্নতি $\angle ADB = 30°$ AC = 36 মিটার এবং B, C, D একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, উচ্চতা = AB মিটার

ΔABC এর ভূমি = BC মি.

ΔABD এর ভূমি = BD মি.

AC = 36 মিটার

ΔABC এর অবনতি কোণ $\angle CAE = 60°$

$\therefore$ উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60°$

ΔABD এর উন্নতি কোণ $\angle ADB = 30°$

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\sin\angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 60° = \frac{AB}{36}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{36}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{AB}{18}$

বা, $AB = 18\sqrt{3}$

বা, $AB = 18 \times 1.732$

$\therefore AB = 31.177$ (প্রায়)

আবার, $\cos\angle ACB = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$

বা, $\cos 60° = \frac{BC}{36}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BC}{36}$

বা, $1 = \frac{BC}{18}$

$\therefore BC = 18$

ΔABD-এর ক্ষেত্রে,

$\tan\angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \frac{18\sqrt{3}}{}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{BD}$

বা, $BD = 18(\sqrt{3})^2$

$\therefore BD = 54$

এবং $\sin\angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

বা, $\sin 30^\circ = \frac{AB}{AD}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{AD}$

বা, $AD = 36\sqrt{3}$

$\therefore AD = 62.354$ (প্রায়)

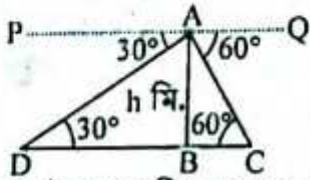
$\therefore CD = (BC + BD)$ মিটার

$= (18 + 54)$ মিটার $= 72$ মিটার

উত্তর : AB = 31.177 মিটার (প্রায়), AD = 62.354, মি. (প্রায়), CD = 72 মি.

□ **কাজ :** [পৃষ্ঠা- ১৭৭]

দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলনুটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বেলুনের উচ্চতা AB = h মিটার।

দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী দূরত্ব DC = 1000 মিটার।

BC = x মিটার, BD = (1000 – x) মিটার।,

ΔABD এর অবনতি কোণ ∠PAD = 30°

উন্নত কোণ ∠ADB = 30°

আবার, ΔABC এর অবনতি কোণ ∠QAC = 60°

∴ উন্নতি কোণ ∠ACB = 60°

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\tan\angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$

$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .... (i)

আবার, ΔABD–এর ক্ষেত্রে,

$\tan\angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30^\circ = \frac{h}{1000 - x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{1000 - x}$

বা, $\sqrt{3}h = 1000 - x$

বা, $x = 1000 - \sqrt{3}h$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{h}{\sqrt{3}} = 100 - \sqrt{3}h$

বা, $\sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = 1000$

বা, $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h = 1000$

বা, $\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)h = 1000$

বা, $h = \frac{1000\sqrt{3}}{4}$

বা, $h = 250\sqrt{3}$

বা, $h = 250 \times 1.732$

$\therefore h = 433.013$ (প্রায়)

∴ নির্ণেয় বেলুনটির উচ্চতা 433.013 মিটার (প্রায়)।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। ক) ∠CAD এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

খ) AB ও BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) A ও D এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

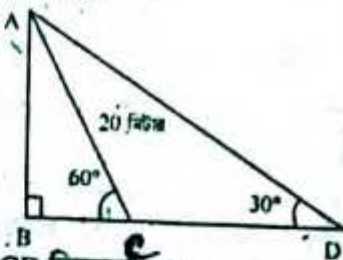
সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, ∠ACB = 60°

তাহলে, ∠ACB + ∠ACD = 180°

বা, 60° + ∠ACD = 180° [∴ ১ সরল কোণ বলে]

বা, ∠ACD = 180° – 60°

∴ ∠ACD = 120°

এখন, ΔACD ত্রিভুজে –এ

∠ACD + ∠ADC + ∠CAD = 180°

বা, 120° + 30° + ∠CAD = 180°

বা, 150° + ∠CAD = 180°

বা, ∠CAD = 180° – 150°

∴ ∠CAD = 30° (Ans.)

খ) দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ AC = 20 মিটার এবং অতিভুজ সংলগ্ন কোণ ∠ACB = 60°

∴ AB এর দৈর্ঘ্য $= \frac{AB}{AC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin\angle ACB$

বা, $\frac{AB}{20} = \sin 60^\circ$

বা, $\frac{AB}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\frac{AB}{10} = \sqrt{3}$

বা, $AB = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 17.321$ মিটার (প্রায়)

আবার, BC এর দৈর্ঘ্য $= \frac{BC}{AC} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \cos\angle ACB$

বা, $\frac{BC}{20} = \cos 60^\circ$

বা, $\frac{BC}{20} = \frac{1}{2}$

বা, $BC = \frac{20}{2}$

$\therefore BC = 10$ মিটার।

অতএব, AB ও BC এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 17·321 মিটার ও 10 মিটার। (Ans.)

গ) আবার, ΔABD-এ

$\angle ADB = 30°$

$\therefore$ ΔABD-এ

$\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD}$

বা, $\sin 30° = \frac{17.321}{AD}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{17.321}{AD}$

বা, $AD = 34.642$

$\therefore$ A ও D এর দূরত্ব 34.642 মিটার (Ans.)

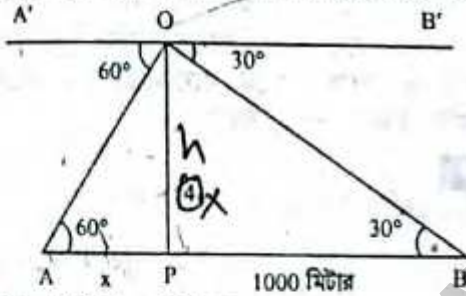
২। দুটি কিলোমিটার পোস্ট A ও B এর মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপর O বিন্দুতে একটি হেলিকপ্টার হতে ঐ কিলোমিটার পোস্টদ্বয়ের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°।

ক) সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন কর।

খ) হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে কত উচুতে অবস্থিত?

গ) A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, O বিন্দুতে হেলিপ্টারের অবস্থান এবং ধরি, A ও B এক কিলোমিটার দূরবর্তী দুইটি পোস্টের চূড়া। O থেকে A ও B এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°।

এতএব $\angle A'OA = 60°$ ও

$\angle B'OB = 30°$

এখন, A'B' ও AB সমান্তরাল বলে

$\angle A'OA = \angle OAB = 60°$ ও

$\angle B'OB = \angle OBA = 30°$

এখানে, AB = 1000 মিটার। O থেকে AB এর উপর লম্ব OP = h মিটার।

মনেকরি, AP = x মিটার, OP = h মিটার।

অতএব, BP = AB − AP = (1000− x) মিটার।

খ) মাটি থেকে হেলিকপ্টারে উচ্চতা নির্ণয় চিত্রে, AOP সমকোণী ত্রিভুজ, $\frac{OP}{AP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle OAB$

বা, $\frac{OP}{AP} = \tan 60°$

বা, $\frac{h}{x} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $h = \sqrt{3}x$ .... (i)

আবার, BOP সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{OP}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle OBA$

বা, $\frac{OP}{BP} = \tan 30°$

বা, $\frac{h}{1000 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $1000 - x = \sqrt{3}h$

বা, $1000 - x = \sqrt{3}.\sqrt{3}.x$

বা, $1000 - x = 3x$

বা, $1000 = 3x + x$

বা, $4x = 1000$

বা, $x = \frac{1000}{4}$

$\therefore x = 250$

এখন (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$h = \sqrt{3} \times 250$

$= 1·732050807 \times 250$

$= 433·0127017$

$\therefore = 433·013$

অতএব হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে 433.013 মিটার উঁচুতে অবস্থিত (Ans.)

গ) A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় :

A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব হলো AO এর দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব।

এখন, OAP সমকোণী ত্রিভুজের OP = 433.013 মিটার এবং AP = 250 মিটার

(খ) হতে পাই,

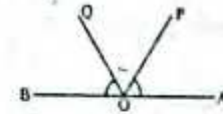
$\therefore$ OAP সমকোণী ত্রিভুজে,

$OA = \sqrt{AP^2 + OP^2}$

$= \sqrt{(250)^2 + (433·013)^2}$

$= \sqrt{62500 + 187500·2582}$

= 500 মিটার।

অতএব, A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব 500 মিটার। (Ans.)

৩। ওপরের চিত্রের O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোন কোনটি ?

ক) ∠QOB খ) ∠POA গ) ∠QOA ঘ) ∠POB

উত্তর : খ) ∠POA

৪। i) ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা।

ii) উর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের ওপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা।

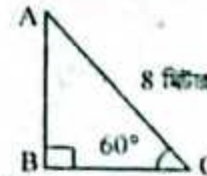
iii) ভূমিতলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে এ তলকে উলম্ব তল বলে।

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : (ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্র অনুযায়ী ৫ – ৬ প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।

৫। BC এর দৈর্ঘ্য হবে –

ক $\frac{4}{\sqrt{3}}$m খ 4m গ $4\sqrt{2}$m ঘ $\frac{4}{\sqrt{3}}$m

উত্তর : খ) 4m

৬। AB এর দৈর্ঘ্য হবে –

ক $\frac{4}{\sqrt{3}}$m খ 4m গ $4\sqrt{2}$m ঘ $4\sqrt{3}$m

উত্তর : ঘ) $4\sqrt{3}$m

৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলো, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনাটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষবিন্দু A.

মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব OB = X মিটার।

∴ $\angle AOB = 30°$ এবং AB = 26 মিটার।

এখন, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30° = \frac{26}{X}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{X}$

বা, $X = 26\sqrt{3}$

বা, $X = 26 \times 1.73205$

বা, $X = 45.03332098$

বা, $X = 45.033$

∴ মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব = 45.033 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৮। একটি গাছের পাদদেশ থেকে ২০ মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ায় উন্নতি কোন 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের পাদদেশ B এবং ভূতলের নির্দিষ্ট বিন্দু C এবং চূড়া A

এখানে, BC = 20 মিটার

এবং $\angle ACB = 60°$

ধরি, গাছের উচ্চতা, AB = h

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BCA$

বা, $\frac{AB}{BC} = \tan 60°$

বা, $\frac{h}{20} = \sqrt{3}$

বা, $h = 20\sqrt{3}$

বা, $h = 20 \times 1.732050807$

বা, $h = 34.64101614$

বা, $h = 34.641$

অতএব, গাছের নির্ণেয় উচ্চতা = 34.641 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৯। 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোন উৎপন্ন করে দেয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা, AB = h মিটার এবং ছাদের সাথে মই–এর স্পর্শবিন্দু B। এখানে, মইয়ের দৈর্ঘ্য, OB = 18 মিটার এবং $\angle AOB = 45°$

∴ $\frac{AB}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle AOB$

বা, $\frac{AB}{OB} = \sin 45°$

বা, $\frac{h}{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18}{\sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18\sqrt{2}}{2}$

বা, $h = 9\sqrt{2}$

$= 9 \times 1.414213562$

$= 12.72792205$

∴ $h = 12.728$

অতএব, দেওয়ালের উচ্চতা, h = 12.728 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১০। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি, ঘরটির উচ্চতা BC = h মিটার B বিন্দুতে A বিন্দুর অবনতি কোন $\angle OBA = 30°$

তাহলে, $\angle CAB = 30°$ [একান্তর কোণ বলে]

এখানে, AB = 20 মিটার

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজ,

$\frac{BC}{AB} = \sin \angle CAB$

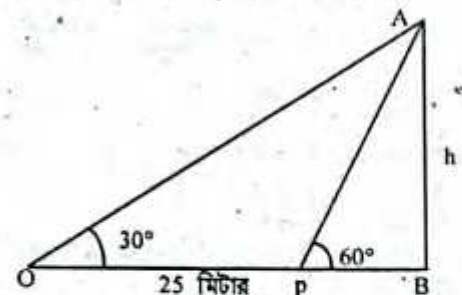
বা, $\frac{BC}{AB} = \sin 30°$

বা, $\frac{h}{20} = \frac{1}{2}$

বা, $h = \frac{20}{2}$

∴ $h = 10$

অতএব, ঘরটির নির্ণেয় উচ্চতা 10 মিটার। (Ans.)

১১। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতিকোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা, AB = h মিটার

এবং স্তম্ভের প্রস্থ, BP = x মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60°$, $\angle BOA = 30°$

এবং OP = 25 মিটার।

∴ BO = (BP + PO) = (x + 25) মিটার

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$

বা, $\frac{AB}{BO} = \tan 30°$

বা, $\frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{h}{x + 25} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $x + 25 = h\sqrt{3}$ .... (i)

আবার, $\frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$

৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলো, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনাটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষবিন্দু A.

মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব OB = X মিটার।

∴ $\angle AOB = 30°$ এবং AB = 26 মিটার।

এখন, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30° = \frac{26}{X}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{X}$

বা, $X = 26\sqrt{3}$

বা, $X = 26 \times 1.73205$

বা, $X = 45.03332098$

বা, $X = 45.033$

∴ মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব = 45.033 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৮। একটি গাছের পাদদেশ থেকে ২০ মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ায় উন্নতি কোন 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের পাদদেশ B এবং ভূতলের নির্দিষ্ট বিন্দু C এবং চূড়া A

এখানে, BC = 20 মিটার

এবং $\angle ACB = 60°$

ধরি, গাছের উচ্চতা, AB = h

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BCA$

বা, $\frac{AB}{BC} = \tan 60°$

বা, $\frac{h}{20} = \sqrt{3}$

বা, $h = 20\sqrt{3}$

বা, $h = 20 \times 1.732050807$

বা, $h = 34.64101614$

বা, $h = 34.641$

অতএব, গাছের নির্ণেয় উচ্চতা = 34.641 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৯। 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোন উৎপন্ন করে দেয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা, AB = h মিটার এবং ছাদের সাথে মই–এর স্পর্শবিন্দু B। এখানে, মইয়ের দৈর্ঘ্য, OB = 18 মিটার এবং $\angle AOB = 45°$

∴ $\frac{AB}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle AOB$

বা, $\frac{AB}{OB} = \sin 45°$

বা, $\frac{h}{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18}{\sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

বা, $h = \frac{18\sqrt{2}}{2}$

বা, $h = 9\sqrt{2}$

$= 9 \times 1.414213562$

$= 12.72792205$

∴ $h = 12.728$

অতএব, দেওয়ালের উচ্চতা, h = 12.728 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১০। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি, ঘরটির উচ্চতা BC = h মিটার B বিন্দুতে A বিন্দুর অবনতি কোন $\angle OBA = 30°$

তাহলে, $\angle CAB = 30°$ [একান্তর কোণ বলে]

এখানে, AB = 20 মিটার

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজ,

$\frac{BC}{AB} = \sin \angle CAB$

বা, $\frac{BC}{AB} = \sin 30°$

বা, $\frac{h}{20} = \frac{1}{2}$

বা, $h = \frac{20}{2}$

∴ $h = 10$

অতএব, ঘরটির নির্ণেয় উচ্চতা 10 মিটার। (Ans.)

১১। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতিকোন 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা, AB = h মিটার

এবং স্তম্ভের প্রস্থ, BP = x মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60°$, $\angle BOA = 30°$

এবং OP = 25 মিটার।

∴ BO = (BP + PO) = (x + 25) মিটার

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$

বা, $\frac{AB}{BO} = \tan 30°$

বা, $\frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{h}{x + 25} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $x + 25 = h\sqrt{3}$ .... (i)

আবার, $\frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$

বা, $\frac{AB}{BP} = \tan 60°$

বা, $\frac{h}{x} = \sqrt{3}$

$\therefore h = x\sqrt{3}$ ----------------(ii)

এখন, (i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,

$x + 25 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

বা, $x + 25 = 3x$

বা, $x - 3x = -25$

বা, $-2x = -25$

বা, $2x = 25$

$\therefore x = \frac{25}{2} = 12.5$

(ii) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই,

$h = \frac{25}{2} \times \sqrt{3}$

বা, $h = \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{25 \times 1.732050807}{2}$

$= \frac{43.30127017}{2}$

$= 21.65063508$

$= 21.651$

অতএব, স্তম্ভটির উচ্চতা = 21.651 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১২। কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি কোন 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, AB মিনারের শীর্ষবিন্দু A ও পাদবিন্দু B. ভূতলের কোন বিন্দু O তে মিনারের শীর্ষবিন্দু A এর উন্নতি কোণ = ∠AOB এবং C তে উন্নতি কোণ = ∠ACB.

দেওয়া আছে, ∠AOB = 45°

∠ACB = 60°

এবং OC = 60 মিটার

মিনারটির উচ্চতা (AB) নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, মিনারটির উচ্চতা AB = h মিটার এবং, BC = x

তাহলে, BO = BC + CO = (x + 60) মিটার

এখন, সমকোণী ΔAOB এর, লম্ব = AB ও ভূমি = OB

$\therefore \tan \angle AOB = \frac{AB}{BO}$

বা, $\tan 45° = \frac{h}{x + 60}$ [∵ ∠AOB = 45°]

বা, $1 = \frac{h}{x + 60}$ [∵ tan45° = 1]

বা, $x + 60 = h$

$\therefore x = h - 60$ .... (i)

আবার, সমকোণী ΔACB এর লম্ব = AB ও ভূমি = BC

$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$ [∵ ∠ACB = 60°]

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [∵ tan60° = $\sqrt{3}$]

বা, $h = x\sqrt{3}$

বা, $h = (h - 60)\sqrt{3}$

[(i) নং থেকে x এর মান বসিয়ে পাই]

বা, $h = h\sqrt{3} - 60\sqrt{3}$

বা, $h\sqrt{3} - h = 60\sqrt{3}$

বা, $h(\sqrt{3} - 1) = 60\sqrt{3}$

বা, $h = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

বা, $h = \frac{60\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$

[লব ও হরকে $\sqrt{3} + 1$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{3 - 1}$

বা, $h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{2}$

বা, $h = 30\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

বা, $h = 30(\sqrt{3}^2 + \sqrt{3})$

$= 30(3 + \sqrt{3})$

$= 30(3 + 1.732050807)$

$= 30 \times 4.732050807$

$= 141.9615242$

$= 141.962$ মিটার

অতএব, মিনারটির নির্ণেয় উচ্চতা = 141.962 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১৩। একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, টাওয়ারটির উচ্চতা, AB = h মিটার এবং নদীর প্রস্থ, BP = x মিটার।

এখানে, ∠BPA = 60°, ∠BOA = 30° এবং OP = 96 মিটার।

$\therefore$ BO = (BP + PO) = (x + 96) মিটার

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$

বা, $\frac{AB}{BO} = \tan 30°$

বা, $\frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{h}{x + 96} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

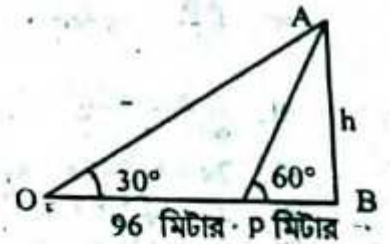
$\therefore x + 96 = h\sqrt{3}$ .... (i)

আবার, $\frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$

বা, $\frac{AB}{BP} = \tan 60°$

বা, $\frac{h}{x} = \sqrt{3}$

$\therefore h = x\sqrt{3}$ ----------------(ii)

এখন, (i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,

$x + 96 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

বা, $x + 96 = 3x$

বা, $x - 3x = -96$

বা, $-2x = -96$

বা, $2x = 96$

$\therefore$ $x = \frac{96}{2} = 48$

(ii) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই,

$h = 48 \times \sqrt{3}$

বা, $h = 48 \times 1.7320$

$= 83.138$

অতএব, স্তম্ভটির উচ্চতা = 83.138 মিটার এবং নদীর বিস্তার = 48 মিটার (Ans.)

১৪। 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

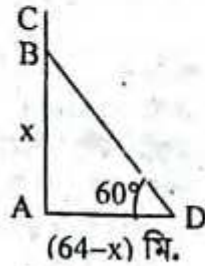
সমাধান : মনেকরি, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য AC = 64 মিটার, খুঁটিটি B বিন্দুতে ভেঙে গিয়ে ভূমির সাথে D বিন্দুতে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, খুঁটিটি x উচ্চতায় ভেঙে থাকে তবে, $AB = AC - BC$

বা, $AB = 64 - BD$

বা, $x = 64 - BD$

$\therefore$ $BD = 64 - x$

(64−x) মি.

এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $\frac{AB}{BD} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle ADB$

বা, $\frac{AB}{BD} = \sin 60°$

বা, $\frac{x}{64 - x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $2x = \sqrt{3}(64 - x)$

বা, $2x = \sqrt{3}.64 - \sqrt{3}x$

বা, $2x + \sqrt{3}x = 64 \times 1.73205080$

বা, $x(2 + \sqrt{3}) = 110.85$

বা, $x = \frac{110.85}{2 + \sqrt{3}}$

বা, $x = \frac{110.85}{2 + 1.73205080}$

বা, $x = \frac{110.85}{3.732050808}$

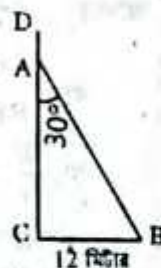
$\therefore$ $x = 29.702$ (প্রায়)

অতএব, খুঁটিটি 29.702 মিটার (প্রায়) উঁচুতে ভেঙেছিল। (Ans.)

১৫। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি, গাছটি A বিন্দুতে ভেঙে গিয়ে AB অংশ দণ্ডায়মান অংশ AC এর সাথে $\angle CAB = 30°$ উৎপন্ন করে CB দূরত্বে B বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে।

$\therefore$ গাছটির দৈর্ঘ্য = AC + AD

এখানে, $\angle CAB = 30°$ এবং BC = 12 মিটার

গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য (AC + AD) নির্ণয় করতে হবে।

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle CAB$

বা, $\frac{BC}{AC} = \tan 30°$

বা, $\frac{12}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $AC = 12\sqrt{3}$

আবার, $\frac{BC}{AB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle CAB$

বা, $\frac{BC}{AB} = \sin 30°$

বা, $\frac{12}{AB} = \frac{1}{2}$

বা, AB = 24 মিটার

$\therefore$ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, $CD = (AD + AC)$

$= (AB + AC)$

$= 24 + 12\sqrt{3}$

$= 12(2 + \sqrt{3})$

$= 12\ (2 + 1.732050807)$

$= 12 \times 3.732050807$

= 44.785 মিটার (প্রায়)

অতএব, গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য = 44.785 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১৬। একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখালো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌছল।

ক) উপরিউক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

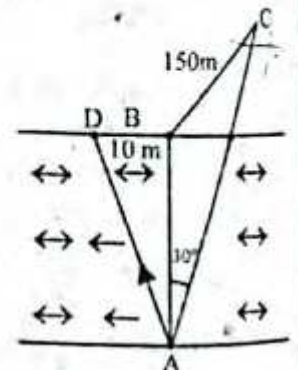
খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) উপরিউক্ত বর্ণনাটির চিত্র হলো–

মনে করি,

একটি লোক A অবস্থানে থেকে BC = 150 m দৈর্ঘ্যের একটি গাছ লক্ষ করলো যার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি গাছের দিকে যাত্রা শুরু করলে স্রোতের দরুন সে গাছ থেকে BD = 10 m দূরে গিয়ে উদ্দিষ্ট তীরে পৌছাল।

খ) চিত্রে দেখা যাচ্ছে নদীর বিস্তার = AB

এখন ΔABC-এ

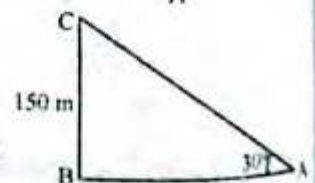
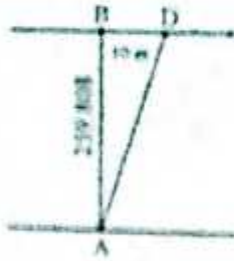
$\tan \angle BAC = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

বা, $\tan 30° = \frac{BC}{AB}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{AB}$

বা, $AB = 150\sqrt{3}$

$\therefore$ AB = 259.808 (প্রায়)

$\therefore$ নদীর বিস্তার AB = 259.808 (প্রায়)

নৌকাটি B অবস্থানের গাছটির দিকে যাত্রা শুরু করলে স্রোতের টানে সে গাছ থেকে 10 m দূরে D অবস্থানে তীরে পৌঁছায়। অর্থাৎ নৌকাটির যাত্রা ও গন্তব্য স্থানের দূরত্ব AD।
এখন,
সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD এ $AD^2 = AB^2 + BD^2$

বা, $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2}$
বা, $AD = \sqrt{(259.808)^2 + (10)^2}$
বা, $AD = \sqrt{67500.197 + 100}$
বা, $AD = \sqrt{67600.197}$
$\therefore AD = 260$
∴ নৌকাটির যাত্রা ও গন্তব্য স্থানের দূরত্ব 260 মিটার।

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $\sin 30^\circ$ = কত? [জয়পাড়া পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]
ক $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{2}$ (ঘ)

২. $\tan\frac{\pi}{3}.\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{6}$ এর মান কত? [জয়পাড়া পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]
ক $2\sqrt{3}$ খ 2 গ $\sqrt{3}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (গ)

৩. $3\sin^2\theta - 4\cos^2\theta = 0$ হলে $\tan\theta$ = কত? [তিতিরিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]
ক $\frac{3}{4}$ খ $\frac{4}{3}$ গ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ঘ)

৪. ভূমি তলে অবস্থিত কোনো সরল রেখাকে কী নামে অভিহিত করা হয়?
ক উর্ধ্বরেখা খ উল্লম্ব তল
গ অবনতি তল ঘ ভূ-রেখা (ঘ)

৫. ভূ-রেখার অপর নাম নিচের কোনটি?
ক উন্নতি রেখা খ শয়ন রেখা
গ অবনতি রেখা ঘ উর্ধ্বরেখা (খ)

৬. উল্লম্ব রেখার আরেক নাম কোনটি?
ক ভূ-রেখা খ উর্ধ্বরেখা
গ শয়ন রেখা ঘ দৈর্ঘ্য রেখা (খ)

৭. কোন দুটি ত্রিকোণমিতিক উপাদান নিয়ে উল্লম্ব তল গঠিত হয়?
ক ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা
খ ভূ-রেখা ও শয়নরেখা
গ উন্নতি রেখা ও অবনতি রেখা
ঘ দূরত্ব ও উচ্চতা (ক)

৮. সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 60° হলে নিচের কোনটি সঠিক?
ক ভূমি > লম্ব খ ভূমি < লম্ব
গ ভূমি = লম্ব ঘ ভূমি ≤ লম্ব (খ)

৯. সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 45° কোণের ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?
ক ভূমি > লম্ব খ ভূমি < লম্ব
গ ভূমি = লম্ব ঘ ভূমি ≥ লম্ব (গ)

১০. $\tan 60^\circ$ এর মান কত?
ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\sqrt{3}$ (ঘ)

১১. [illegible] লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের [illegible] বরাবর [illegible] ভূমির সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। দে[illegible] [illegible] কত?
ক 11.78 (প্রায়) খ 12.77 (প্রায়)
গ 12.728 (প্রায়) ঘ 13.78 (প্রায়)

১২. একটি খুঁটিতে সূর্যের আলো পড়লে 2 মিটার দূরত্বে 45° উন্নতি কোণ তৈরি করে। খুঁটিটির উচ্চতা কত মিটার?
ক 6 খ 4 গ 3 ঘ 2 (ঘ)

বহুপদী সমাপ্তিসূচক :

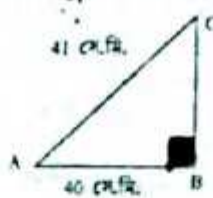
১৩. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর। [তিতিরিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]
i. $\cot\theta = \cos\theta.\operatorname{cosec}\theta$
ii. পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n = \sin^n\theta$ লেখা।
iii. $\sqrt{\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}} = \sqrt{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৪. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্রে— [চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল]
i. $\sin 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ}$
ii. $\tan 45^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ}$
iii. $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ}$
উপরের তথ্যমতে নিচের কোনটি সঠিক?
ক i খ ii
গ i ও ii ঘ ii ও iii (ঘ)

১৫. কোনো সমকোণী ত্রিভুজে ভূমি ও লম্বের ক্ষেত্রে —
i. 45° কোণ অঙ্কনে এরা সমান
ii. 30° কোণ অঙ্কনে ভূমি > লম্ব
iii. 60° কোণ অঙ্কনে ভূমি < লম্ব
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii (ঘ)

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক :

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ১৬ ও ১৭নং পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :

ΔABC-এ $\angle Y = 90^\circ$
AB = 40 সে.মি. এবং
AC = 41 সে.মি.

১৬. BC এর মান কত সে.মি.?
ক 9 খ 29 গ 39 ঘ 49 (ক)
ব্যাখ্যা :
$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{81} = 9$

১৭. tan [illegible]
ক $\frac{9}{40}$ [illegible] $\frac{9}{41}$ [illegible] $\frac{40}{41}$ [illegible] $\frac{41}{40}$

অনুশীলনী- ১১.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : [পৃষ্ঠা–১৮০]

১। 3.5 : 5.6 কে 1 : a এবং b : 1 আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান :
দেওয়া আছে, 3.5 : 5.6

$= 1 : \frac{5.6}{3.5}$ [3.5 দ্বারা ভাগ করে]

$= 1 : 1.6$

$= 1 : a$ [যখন $a = 1.6$]

∴ 3.5 : 5.6 কে 1 : a আকারে প্রকাশ করা হলো।

আবার, 3.5 : 5.6

$= \frac{3.5}{5.6} : 1$ [5.6 দ্বারা ভাগ করে]

$= 0.625 : 1$

$= b : 1$ [যখন $b = 0.625$]

∴ 3.6 : 5.6 কে b : 1 আকারে প্রকাশ করা হলো।

কাজ : ২। $x : y = 5 : 6$ হলে $3x : 5y$ = কত? [পৃষ্ঠা–১৮০]

সমাধান :
দেওয়া আছে, $x : y = 5 : 6$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$

বা, $\frac{3x}{y} = \frac{15}{6}$

বা, $\frac{3x}{5y} = \frac{15}{30}$

বা, $3x : 5y = 15 : 30$

∴ $3x : 5y = 1 : 2$ **(Ans.)**

কাজ : [পৃষ্ঠা–১৮২]

৩। মাতা ও কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি s বছর। তাদের বয়সের অনুপাত t বছর পূর্বে ছিল r : p, x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান : মনে করি, মাতার বর্তমান বয়স a বছর এবং কন্যার বর্তমান বয়স b বছর। তাহলে

প্রশ্নানুসারে, $a + b = s$ .... (i)

$\frac{a-t}{b-t} = \frac{r}{p}$ .... (ii)

এখন, ii নং থেকে পাই,

$\frac{a-t}{r} = \frac{b-t}{p} = \frac{a+b-2t}{r+p} = \frac{s-2t}{r+p}$ [i নং থেকে]

∴ $a - t = \frac{(s-2t)r}{r+p}$

বা, $a = \frac{(s-2t)r}{r+p} + t$

এবং $b - t = \frac{(s-2t)p}{r+p}$

বা, $b = \frac{(s-2t)p}{r+p} + t$

∴ x বছর পরে মাতা ও কন্যার বয়সের অনুপাত

$= \frac{a+x}{b+x}$

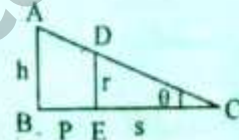
$= \frac{\frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x}{\frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x}$

∴ x বছর পরে মাতা ও কন্যার বয়সের অনুপাত হবে,

$\left\{\frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x\right\} : \left\{\frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x\right\}$ **(Ans.)**

কাজ :

৪। একটি ল্যাম্পপোস্ট থেকে p মিটার দূরে দাঁড়ানো r মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট এক ব্যক্তির ছায়ার দৈর্ঘ্য s মিটার। ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা h মিটার হলে, ঐ ব্যক্তি ল্যাম্পপোস্ট থেকে কত দূরে দাঁড়ানো ছিলেন? [পৃষ্ঠা–১৮২]

সমাধান :

মনে করি, ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা, AB = h মিটার এবং ব্যক্তির উচ্চতা, DE = r মিটার

ল্যাম্পপোস্ট থেকে ব্যক্তির দূরত্ব, BE = p মিটার

ব্যক্তির ছায়া, EC = s মিটার

∴ ল্যাম্পপোস্ট থেকে ছায়ার শেষ বিন্দুর দূরত্ব, BC = (p + s) মিটার

যেহেতু, ছায়া উচ্চতার সমানুপাতিক

সুতরাং, $r \propto s$

বা, $r = ks$ [k একটি ধ্রুবক]

বা, $\frac{r}{s} = k$ .... (i)

আবার, চিত্র থেকে $h \propto (p + s)$

বা, $h = k(p + s)$

বা, $\frac{h}{p+s} = k$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii)নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{h}{p+s} = \frac{r}{s}$

বা, $hs = r(p + s)$

বা, $hs = rp + rs$

বা, $rp = hs - rs$

বা, $p = \frac{s(h-r)}{r}$

∴ $p = \left(\frac{h}{r} - 1\right)s$ মিটার

∴ ল্যাম্পপোস্ট থেকে ব্যক্তির দূরত্ব,

$p = \left(\frac{h}{r} - 1\right)s$ মিটার।

উত্তর : $\left(\frac{h}{r} - 1\right)s$ মিটার।

বা, $\frac{a^2 - ab + b^2}{a - b + c} = a$ [উভয়পক্ষকে (a+b) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = a(a - b + c)$ [আড়গুণন করে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + ac$

বা, $a^2 - ab + b^2 - a^2 + ab = ac$

বা, $b^2 = ac$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore a : b = b : c$

$\therefore$ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী। (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ৯॥ যদি $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $c = a$ অথবা $a + b + c + d = 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$

বা, $\frac{a+b}{b+c} - 1 = \frac{c+d}{d+a} - 1$

বা, $\frac{a+b-b-c}{b+c} - \frac{c+d-d-a}{d+a} = 0$

বা, $\frac{a-c}{b+c} + \frac{a-c}{d+a} = 0$

বা, $(a-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right) = 0$

বা, $(a-c)\frac{(d+a+b+c)}{(b+c)(d+a)} = 0$

বা, $(a-c)(d+a+b+c) = 0$

হয় $a - c = 0$

বা, $a = c$

অর্থাৎ, $c = a$

অথবা, $a + b + c + d = 0$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ১০॥ যদি $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z সকলে পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাতের মান –1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

সমাধান : মনে করি, $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = k$

অতএব, $\frac{x}{y+z} = k$

$\therefore x = k(y+z)$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $y = k(z+x)$ ..... (ii)

এবং $z = k(x+y)$ .... (iii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$x - y = k(y+z) - k(z+x)$

বা, $x - y = k(y + z - z - x)$

বা, $x - y = k(y - x)$

বা, $x - y = -k(x - y)$

$\therefore k = -1$; $[\because x - y \neq 0]$

অর্থাৎ, প্রতিটি অনুপাতের মান = – 1

আবার, সমীকরণ (i), (ii) এবং (iii) যোগ করে পাই,

$x + y + z = k(y+z) + k(z+x) + k(x+y)$

বা, $x + y + z = k(y + z + z + x + x + y)$

বা, $x + y + z = k(2x + 2y + 2z)$

বা, $x + y + z = 2k(x + y + z)$

বা, $2k = 1$ $[\because x + y + z \neq 0]$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান –1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান। (প্রমাণিত)

উদাহরণ– ১১॥ যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax = by = cz$

মনে করি, $ax = by = cz = k$;

তাহলে, $ax = k$ $by = k$ এবং $cz = k$

$\therefore x = \frac{k}{a}$ $\therefore y = \frac{k}{b}$ $\therefore z = \frac{k}{c}$.

অতএব,

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$= \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2}{\frac{k}{b}\cdot\frac{k}{c}} + \frac{\left(\frac{k}{b}\right)^2}{\frac{k}{c}\cdot\frac{k}{a}} + \frac{\left(\frac{k}{c}\right)^2}{\frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b}}$

$= \frac{k^2}{a^2} \times \frac{bc}{k^2} + \frac{k^2}{b^2} \times \frac{ca}{k^2} + \frac{k^2}{c^2} \times \frac{ab}{k^2}$

$= \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$ (দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১১.১

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার ও b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান :

ধরি, ১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a

এবং ২য় " " = b

$\therefore$ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গমিটার

এবং ২য় " " = b^2 "

অতএব, দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের নির্ণেয় অনুপাত = $a^2 : b^2$

২। একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর?

সমাধান : আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2,

এখানে r = ব্যাসার্ধ

এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2,

এখানে a = বর্গক্ষেত্রের বাহু।

প্রশ্নমতে, $a^2 = \pi r^2$

বা, $a = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$

এখন, বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$

এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $4a$

∴ বৃত্তের পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $2\pi r : 4a$

$= 2\pi r : 4.r\sqrt{\pi}$; [a এর মান বসিয়ে]

$= \frac{2\pi r}{2r} : \frac{2.2r\sqrt{\pi}}{2r} = \pi : 2\sqrt{\pi}$

$= \sqrt{\pi} : 2$ (Ans.)

৩। দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ল. সা. গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সংখ্যা দুটির অনুপাত = 3 : 4

মনে করি, একটি সংখ্যা = 3x

∴ অপর সংখ্যা = 4x

এখন, 3x এবং 4x এর ল. সা. গু = 12x

প্রশ্নমতে, 12x = 180

$\therefore x = \frac{180}{12}$

∴ x = 15

∴ একটি সংখ্যা = 3x = 3 × 15 = 45

এবং অপর সংখ্যাটি = 4x = 4 × 15 = 60

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা দুটি হলো, 45 এবং 60

৪। একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা অনুপাত 1 : 4. অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান :

অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত = 1 : 4

∴ ধরি অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = x

এবং উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = 4x

∴ মোট ছাত্রসংখ্যা = x + 4x = 5x

∴ অনুপস্থিত ছাত্র, মোট ছাত্র সংখ্যার = $\frac{x}{5x}$ অংশ

∴ অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা, মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরা হার

$= \frac{x}{5x} \times 100 = 20$

∴ নির্ণেয় অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার 20%

৫। একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হল। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ক্রয় মূল্য = 100 টাকা।

∴ 28% ক্ষতিতে বিক্রয় মূল্য = (100–28) টাকা

= 72 টাকা।

এখন বিক্রয় মূল্য : ক্রয় মূল্য = 72 : 100

$= \frac{72}{4} : \frac{100}{4}$ [4 দ্বারা ভাগ করে]

= 18 : 25

∴ নির্ণেয় অনুপাত = 18 : 25

৬। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

সমাধান :

মনে করি,

7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল = 5x বছর

7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল = 2x বছর

∴ বর্তমানে পিতার বয়স হবে = (2x + 7) বছর

∴ বর্তমানে পুত্রের বয়স হবে = (2x + 7) বছর

প্রশ্নমতে,

(5x + 7) + (2x + 7) = 70

বা, 5x + 7 + 2x + 7 = 70

বা, 7x + 14 = 70

বা, 7x = 70 – 14

বা, 7x = 56

বা, $x = \frac{56}{7}$

∴ x = 8

∴ পিতার বর্তমান বয়স = 5x + 7 = 40 + 7 = 47 বছর

∴ পুত্রের বর্তমান বয়স = 2x + 7 = 16 + 7 = 23 বছর

5 বছর পর পিতার বয়স হবে = 47 + 5 = 52 বছর

5 বছর পর পুত্রের বয়স হবে = 23 + 5 = 28 বছর

∴ 5 বছর পর পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে

= 52 : 28

= 13 : 7 (Ans.)

৭। যদি a : b = b : c হয়, তবে নিম্নলিখিত দাবি গুলো প্রমাণ কর যে,

i) $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

সমাধান :

দেয়া আছে, a : b = b : c

মনে করি $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$; [এখানে k একটি ধ্রুবক]

এখন $\frac{b}{c} = k$ ∴ b = ck

এবং $\frac{a}{b} = k$ ∴ a = bk

= ck.k [b এর মান বসিয়ে]

$= ck^2$

∴ বামপক্ষ = $\frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$; [∵ $a = ck^2$]

এবং ডানপক্ষ = $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(ck^2)^2+(ck)^2}{(ck)^2+c^2}$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \frac{c^2k^4+c^2k^2}{c^2k^2+c^2}$

$= \frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2(k^2+1)} = k^2$

∴ বামপক্ষ = k^2 = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$

সমাধান : দেয়া আছে, a : b = b : c

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

অর্থাৎ, $b^2 = ac$

এখন, বামপক্ষ = $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$= \frac{a^2b^2c^2}{a^3}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3}$

$= \frac{a^2.ac.c^2}{a^3}+\frac{(ac)^2b^2}{b^3}+\frac{a^2.ac.c^2}{c^3}$

$= \frac{a^3.c^3}{a^3}+\frac{(b^2)^2b^2}{b^3}+\frac{a^3c^3}{c^3}$

$$= \frac{a^3c^3}{a^3} + \frac{b^6}{b^3} + \frac{a^3c^3}{c^3}$$

$$= \frac{a^3c^3}{a^3} + \frac{b^3.b^3}{b^3} + \frac{a^3c^3}{c^3} = c^3 + b^3 + a^3$$

অর্থাৎ, $a^3 + b^3 + c^3 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

এখন, $\frac{b}{c} = k \therefore b = ck$

এবং $\frac{a}{b} = k \therefore a = bk$

$= ck.k$; $[\because b = ck]$

$= ck^2$

এখন, বামপক্ষ $= \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}$

$= \frac{ck^2.ck.c(ck^2+ck+c)^3}{(ck^2.ck+ck.c+c.ck^2)^3}$; [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \frac{c^3k^3(ck^2+ck+c)^3}{(c^2k^3+c^2k+c^2k^2)^3}$

$= \frac{\{ck(ck^2+ck+c)\}^3}{(c^2k^3+c^2k+c^2k^2)^3}$

$= \frac{(c^2k^3+c^2k^2+c^2k)^3}{(c^2k^3+c^2k+c^2k^2)^3}$

$= \frac{(c^2k^3+c^2k^2+c^2k)^3}{(c^2k^3+c^2k^2+c^2k)^3}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iv) $a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$

সমাধান : দেয়া আছে, $a : b = b : c$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore a = bk, b = ck$

অর্থাৎ, $a = ck.k = ck^2$

এখন, ১ম অংশ $= a - 2b + c$

$= ck^2 - 2ck + c$

$= c(k^2 - 2k + 1)$

$= c(k-1)^2$

২য় অংশ $= \frac{(a-b)^2}{a}$

$= \frac{(ck^2-ck)^2}{ck^2} = \frac{\{ck(k-1)\}^2}{ck^2}$

$= \frac{c^2k^2(k-1)^2}{ck^2} = c(k-1)^2$

এবং ৩য় অংশ $= \frac{(b-c)^2}{c} = \frac{(ck-c)^2}{c}$

$= \frac{\{c(k-1)\}^2}{c} = \frac{c^2(k-1)^2}{c} = c(k-1)^2$

$\therefore$ ১ম অংশ = ২য় অংশ = ৩য় অংশ (প্রমাণিত)

৮। সমাধান কর :

i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

সমাধান : $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$; [উভয়পক্ষকে (-2) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\sqrt{1-x} = 1$

বা, $(2\sqrt{1-x})^2 = (1)^2$; [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$

বা, $4 - 4x = 1$

বা, $-4x = 1 - 4$

বা, $-4x = -3$

$\therefore x = \frac{3}{4}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $\frac{3}{4}$

ii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

সমাধান : $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right)^2 = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2}$

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}$

বা, $\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x} = \frac{b^2+2b+1+b^2-2b+1}{b^2+2b+1-b^2+2b-1}$ [পুনঃ যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a}{2x} = \frac{2b^2+2}{2.2b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{2(b^2+1)}{2.2b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{b^2+1}{2b}$

বা, $x(b^2+1) = 2ab$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $x = \frac{2ab}{b^2+1}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{2ab}{b^2+1}$

iii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{x}$ $2a>b>0$ এবং $x\neq 0$

সমাধান : এখানে, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{x}$.

বা, $\frac{(a+x-\sqrt{a^2-x^2})+(a+x+\sqrt{a^2-x^2})}{(a+x-\sqrt{a^2-x^2})-(a+x+\sqrt{a^2-x^2})}=\frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{2a+2x}{-2(\sqrt{a^2-x^2})}=\frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{2(a+x)}{2(-\sqrt{a^2-x^2})}=\frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b+x}{b-x}$

বা, $\left(\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2=\left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$

বা, $\frac{(a^2+2ax+x^2)+(a^2-x^2)}{(a^2+2ax+x^2)-(a^2-x^2)}=\frac{(b^2+2bx+x^2)+(b^2-2bx+x^2)}{(b^2+2bx+x^2)-(b^2-2bx+x^2)}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2}=\frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$

বা, $\frac{2a^2+2ax}{2ax+2x^2}=\frac{2b^2+2x^2}{4bx}$

বা, $\frac{2(a^2+ax)}{2(ax+x^2)}=\frac{2(b^2+x^2)}{2.2bx}$

বা, $\frac{a^2+ax}{ax+x^2}=\frac{b^2+x^2}{2bx}$

বা, $\frac{a(a+x)}{x(a+x)}=\frac{b^2+x^2}{2bx}$

বা, $a=\frac{b^2+x^2}{2b}$

বা, $2ab=b^2+x^2$

বা, $x^2=2ab-b^2$

বা, $x=\pm\sqrt{2ab-b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\pm\sqrt{2ab-b^2}$

iv. $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}=5$

সমাধান : $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}=\frac{5}{1}$

বা, $\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6})-(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6})}=\frac{5+1}{5-1}$

[যোজন-বিযোজন করে]

বা, $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}=\frac{6}{4}$

বা, $\frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-6}}=\frac{3}{2}$

বা, $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}}=\frac{3}{2}$

বা, $\frac{x-1}{x-6}=\frac{9}{4}$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]

বা, $9x-54=4x-4$

বা, $9x-4x=-4+54$

বা, $5x=50$

বা, $x=\frac{50}{5}$ $\therefore x=10$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=10$

v. $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}=C$

সমাধান : $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}=\frac{C}{1}$

বা, $\frac{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b})+(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b})}{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b})-(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b})}=\frac{c+1}{c-1}$

[যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}+\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}-\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}=\frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{2\sqrt{ax+b}}{2\sqrt{ax-b}}=\frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax-b}}=\frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{ax+b}{ax-b}=\frac{(c+1)^2}{(c-1)^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{ax+b}{ax-b}=\frac{c^2+2c+1}{c^2-2c+1}$

বা, $(ax+b)(c^2-2c+1)=(ax-b)(c^2+2c+1)$

বা, $axc^2-2acx+ax+bc^2-2bc+b$
$=axc^2+2acx+ax-bc^2-2bc-b$

বা, $axc^2-2acx+ax+bc^2-2bc+b-axc^2$
$-2acx-ax+bc^2+2bc+b=0$

বা, $-4acx+2bc^2+2b=0$

বা, $-2acx+bc^2+b=0$

বা, $-2acx=-bc^2-b$ [(–) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2acx=bc^2+b$

$\therefore\ x=\frac{b(c^2+1)}{2ac}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{b(c^2+1)}{2ac}$

vi. $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\frac{1+x}{1-x}$

সমাধান : $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\frac{1+x}{1-x}$

বা, $81\frac{(1-x)^3}{(1+x)^3}=\frac{1+x}{1-x}$

বা, $81=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}$

[উভয় পক্ষকে $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^4=\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$

বা, $3^4=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

বা, $\pm 3=\frac{1+x}{1-x}$

এখন, যদি $\frac{1+x}{1-x}=3$ হয় তবে

$1+x=3(1-x)$

বা, $1+x=3-3x$

বা, $x+3x=3-1$

বা, $4x=2$

বা, $x=\frac{2}{4}$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$

আবার,

$\frac{1+x}{1-x}=-3$ হলে,

$1+x=-3(1-x)$

বা, $1+x=-3+3x$

বা, $1+3=3x-x$

বা, $4=2x$

$\therefore x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{1}{2}, 2$

৯। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে দেখাও যে,

i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

$\therefore\ a=bk, c=dk$

এখন, বামপক্ষ $=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$

$=\frac{(bk)^2+bk.b+b^2}{(bk)^2-bk.b+b^2}$ [a-এর মান বসিয়ে]

$=\frac{b^2k^2+b^2k+b^2}{b^2k^2-b^2k+b^2}$

$=\frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

এবং ডানপক্ষ $=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

$=\frac{(dk)^2+dk.d+d^2}{(dk)^2-dk.d+d^2}$

$=\frac{d^2k^2+d^2k+d^2}{d^2k^2-d^2k+d^2}$

$=\frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

$\therefore a=bk,\ \ c=dk$

বামপক্ষ $=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}$

$=\frac{b^2k^2+b^2}{b^2k^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

মধ্যপক্ষ $=\frac{ac+bd}{ac-bd}$

$=\frac{bk.dk+bd}{bk.dk-bd}$ [মান বসিয়ে]

$=\frac{bdk^2+bd}{bdk^2-bd}$

$=\frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

শেষ পক্ষ $=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

$=\frac{(dk)^2+d^2}{(dk)^2-d^2}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{d^2k^2 + d^2}{d^2k^2 - d^2}$

$= \frac{d^2(k^2+1)}{d^2(k^2-1)} = \frac{k^2+1}{k^2-1}$

∴ বামপক্ষ = মধ্যপক্ষ = শেষপক্ষ

অর্থাৎ $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{ac+bd}{ac-bd} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ (দেখানো হলো)

১০। $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

সমাধান :

দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k =$

∴ $a = bk, b = ck, c = dk$

অর্থাৎ $a = ck.k = dk.k^2 = dk^3$

এবং $b = ck = dk.k = dk^2$

এখন, বামপক্ষ, $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}$

$= \frac{(dk^3)^3 + (dk^2)^3}{(dk^2)^3 + (dk)^3} = \frac{d^3k^9 + d^3k^6}{d^3k^6 + d^3k^3}$

$= \frac{d^3k^6(k^3+1)}{d^3k^3(k^3+1)} = k^3$

এবং ডানপক্ষ, $\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

$= \frac{(dk^2)^3 + (dk)^3}{(dk)^3 + d^3} = \frac{d^3k^6 + d^3k^3}{d^3k^3 + d^3}$

$= \frac{d^3k^3(k^3+1)}{d^3(k^3+1)} = k^3$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

∴ $a = bk, b = ck, c = dk$

অর্থাৎ $a = bk = ck.k = dk.k.k = dk^3$

এবং $b = ck = dk.k = dk^2$

এখন, বামপক্ষ

$= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= d^2k^2(k^4+k^2+1).d^2(k^4+k^2+1)$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

আবার, ডানপক্ষ

$= (ab+bc+cd)^2$

$= (dk^3.dk^2 + dk^2.dk + dk.d)^2$

$= (d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2$

$= \{d^2k(k^4+k^2+1)\}^2 = d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2, a \neq b$

সমাধান : দেয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

∴ $\frac{x}{2a} = \frac{4ab}{2a(a+b)}$ [উভয় পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$ ------- (i)

আবার, $x = \frac{4ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{4ab}{2b(a+b)}$ [উভয় পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$ --------- (ii)

এখন, (i) এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a-3a-b}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2b-2a}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2(b-a)}{(b-a)}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$

∴ $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ (দেখানো হল)

১২। $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান : দেয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} - \sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3}=\frac{(\sqrt[3]{m+1})^3}{(\sqrt[3]{m-1})^3}$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1}$

$=\frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^3+2.3x}{2.3x^2+2}=\frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)}=\frac{m}{1}$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=\frac{m}{1}$

বা, $x^3+3x=m(3x^2+1)$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $x^3+3x=3mx^2+m$

$\therefore$ $x^3-3mx^2+3x-m=0$ (প্রমাণিত)

১৩। $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0$

সমাধান: দেয়া আছে, $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{(\sqrt{2a+3b})^2}{(\sqrt{2a-3b})^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1}=\frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$

[পুনঃ যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^2+2}{2.2x}=\frac{2.2a}{2.3b}$

বা, $\frac{2(x^2+1)}{2.2x}=\frac{2.2a}{2.3b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2a}{3b}$

বা, $3b(x^2+1)=2a.2x$

বা, $3bx^2+3b=4ax$

$\therefore$ $3bx^2-4ax+3b=0$ (দেখানো হলো)

১৪। $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b,c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

বা, $(a^2+b^2)(b+c)^2=(b^2+c^2)(a+b)^2$

বা, $(a^2+b^2)(b^2+2bc+c^2)=(b^2+c^2)(a^2+2ab+b^2)$

বা, $a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2+b^4+2b^3c+b^2c^2$
$=a^2b^2+2ab^3+b^4+a^2c^2+2abc^2+b^2c^2$

বা, $a^2b^2-a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2-a^2c^2+b^4-b^4$
$+2b^3c+b^2c^2-b^2c^2=2ab^3+2abc^2$

বা, $2a^2bc+2b^3c=2ab^3+2abc^2$

বা, $a^2c+b^2c=ab^2+ac^2$

[উভয় পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2c-ac^2=ab^2-b^2c$

বা, $ac(a-c)=b^2(a-c)$

বা, $ac=b^2$ [উভয় পক্ষকে (a – c) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

অর্থাৎ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী (প্রমাণিত)

১৫। $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

সমাধান: মনে করি, $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$

$\therefore$ $x=k(b+c)$, $y=k(c+a)$, $z=k(a+b)$

১মপক্ষ $=\frac{a}{y+z-x}=\frac{a}{k(c+a)+k(a+b)-k(b+c)}$

$=\frac{a}{k(c+a+a+b-b-c)}=\frac{a}{2ak}=\frac{1}{2k}$

২য় পক্ষ $=\frac{b}{z+x-y}$

$=\frac{b}{k(a+b)+k(b+c)-k(c+a)}$

$=\frac{b}{k(a+b+b+c-c-a)}=\frac{b}{2bk}=\frac{1}{2k}$

৩য় পক্ষ $=\frac{c}{x+y-z}$

$=\frac{c}{k(b+c)+k(c+a)-k(a+b)}$

$=\frac{c}{k(b+c+c+a-a-b)}=\frac{c}{2ck}=\frac{1}{2k}$

$\therefore$ ১ম পক্ষ = ২য় পক্ষ = ৩য় পক্ষ (প্রমাণিত)

১৬। $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

সমাধান: ধরি, $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=k$

$\therefore$ $bz-cy=ak$ -- (i)

$cx-az=bk$ -- (ii)

$ay-bx=ck$ — (iii)

সমীকরণ (i) কে a, (ii) কে b এবং (iii) কে c দ্বারা গুণ করে পাই,

$abz - acy = a^2k$
$bcx - abz = b^2k$
$acy - bcx = c^2k$

(+) করে $0 = a^2k + b^2k + c^2k$
বা, $a^2k + b^2k + c^2k = 0$
বা, $k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$
$\therefore k = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$

i) নং সমীকরণে k = 0 বসিয়ে পাই,
$bz - cy = a.0$
বা, $bz - cy = 0$
বা, $bz = cy$
বা, $\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$ [উভয় পক্ষকে bc দ্বারা ভাগ করে]

ii) নং সমীকরণে k = 0 বসিয়ে পাই,
$cx - az = b.0$
বা, $cx - az = 0$
বা, $cx = az$
বা, $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (প্রমাণিত)

১৭। $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a + b + c \neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, a=b=c.

সমাধান: এখানে আছে, $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c}$

বা, $\frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c}$

বা, $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c}$

বা, $\frac{c+a+b}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c}$ [যোজন করে]

যেহেতু, $a + b + c \neq 0$ সুতরাং $a + b + c$ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে পাই, $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c}$

বা, $a + b = b + c$
বা, $a + b - b = c$
$\therefore a = c$ ---------- (i)

আবার, $\frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $\frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a}$

বা, $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$

বা, $\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{b+c+a}{c+a}$ [যোজন করে]

যেহেতু $a + b + c \neq 0$, সুতরাং $(a + b + c)$ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে পাই, $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a}$

বা, $c + a = b + c$
বা, $c + a - c = b$
$\therefore a = b$ ---------- (ii)
(i) এবং (ii) থেকে পাই, $a = b = c$ (প্রমাণিত)

১৮। $\frac{x}{xa + yb + zc} = \frac{y}{ya + zb + xc} = \frac{z}{za + xb + yc}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a+b+c}$

সমাধান: মনে করি,

$\frac{x}{xa + yb + zc} = \frac{y}{ya + zb + xc} = \frac{z}{za + xb + yc} = k$

$\therefore x = k(xa + yb + zc)$ ....(i)
$y = k(ya + zb + xc)$ ....(ii)
এবং $z = k(za + xb + yc)$ ....(iii)

সমীকরণ (i), (ii) এবং (iii) নং যোগ করে পাই,

$x + y + z = k(xa + yb + zc + ya + zb + xc + za + xb + yc)$
$= k(xa + xb + xc + ya + yb + yc + za + zb + zc)$
$= k\{x(a + b + c) + y(a + b + c) + z(a + b + c)\}$
$= k(a + b + c)(x + y + z)$

$\therefore x + y + z = k(a + b + c)(x + y + z)$
উভয় পক্ষকে $(x + y + z)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,
$1 = k(a + b + c)$
$\therefore k = \frac{1}{a+b+c}$

যেহেতু প্রতিটি অনুপাতের মান k ধরা হয়েছে
সেহেতু k এর মান $= \frac{1}{a+b+c}$
অতএব, প্রতিটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a+b+c}$ (দেখানো হল)

১৯। $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$

সমাধান: দেয়া আছে,
$(a + b + c)p = (b + c - a)q = (c + a - b)r = (a + b - c)s$

বা, $\frac{1}{(a+b+c)p} = \frac{1}{(b+c-a)q} = \frac{1}{(c+a-b)r} = \frac{1}{(a+b-c)s}$ [বিপরীতকরণ করে]

মনে করি, $\frac{1}{(a+b+c)p} = \frac{1}{(b+c-a)q} = \frac{1}{(c+a-b)r} = \frac{1}{(a+b-c)s} = k$

এখন, $\frac{1}{(a+b+c)p} = k$

বা, $\frac{1}{p} = k(a + b + c)$ .... (i)

আবার, $\frac{1}{(b+c-a)q} = k$

$\therefore \frac{1}{q} = k(b+c-a)$

আবার, $\frac{1}{(c+a-b)r} = k$

$\therefore \frac{1}{r} = k(c+a-b)$

আবার, $\frac{1}{(a+b-c)s} = k$

$\therefore \frac{1}{s} = k(a+b-c)$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$

$= k(b+c-a) + k(c+a-b) + k(a+b-c)$ [q, r, s এর মান বসিয়ে]

$= k(b+c-a+c+a-b+a+b-c)$
$= k(a+b+c)$

$= \frac{1}{p}$ [(i) –এর সাহায্যে]

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

২০। যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$

সমাধান : দেয়া আছে, $lx = my = nz$

$\therefore lx = my$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{m}{l}$ অথবা, $\frac{y}{x} = \frac{l}{m}$

আবার, $my = nz$

$\therefore \frac{y}{z} = \frac{n}{m}$ অথবা, $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$

এবং $lx = nz$

বা, $\frac{x}{z} = \frac{n}{l}$ অথবা, $\frac{z}{x} = \frac{l}{n}$

এখন, বাম পক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$= \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\cdot\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}$

$= \frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l} + \frac{n}{m}\cdot\frac{l}{m} + \frac{l}{n}\cdot\frac{m}{n}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ = ডান পক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

২১। যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ .... (i)

এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং থেকে পাই, $\frac{p}{q} = \frac{(\sqrt{a+q})^2}{(\sqrt{a-q})^2}$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-(a-q)}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$

বা, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ (দেখানো হলো)

☐ অনুশীলনী– ১১.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ কাজ : [পৃষ্ঠা–১৯১]

১। তোমাদের শ্রেণিতে 35 জন ছাত্র ও 25 জন ছাত্রী আছে। বনভোজনে খিচুরি খাওয়ার জন্য প্রত্যেক ছাত্র ও ছাত্রীর প্রদত্ত চাল ও ডালের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1 এবং 5 : 2 হলে, মোট চাল ও মোট ডালের অনুপাত বের কর।

সমাধান : মনে করি, প্রত্যেক ছাত্রের চালের পরিমাণ 3x একক

$\therefore$ 35 জন ছাত্রের চালের পরিমাণ $(35 \times 3x)$ বা 105x একক

প্রত্যেক ছাত্রের ডালের পরিমাণ x একক

$\therefore$ 35 জন ছাত্রের ডালের পরিমাণ $(35 \times x)$ বা 35x একক

আবার, মনে করি, প্রত্যেক ছাত্রীর চালের পরিমাণ 5x একক

$\therefore$ 25 জন ছাত্রীর চালের পরিমাণ $(25 \times 5x)$ বা 125x একক

এবং ডালের পরিমাণ 2x একক

25 ছাত্রীর ডালের পরিমাণ $(25 \times 2x)$ বা 50x একক

$\therefore$ মোট চালের পরিমাণ $(105x + 125x)$ বা 230x একক

মোট ডালের পরিমাণ $(35x + 50x)$ বা 85x একক

$\therefore$ মোট চাল : মোট ডাল = 230x : 85x = 46 : 17 [5x দ্বারা ভাগ করে]

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ১২। ক, খ ও গ এক জাতীয় রাশি এবং ক : খ = 3 : 4, খ : গ = 6 : 7 হলে, ক : খ : গ কত?

সমাধান : $\frac{ক}{খ} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$ এবং $\frac{খ}{গ} = \frac{6}{7} = \frac{6 \times 2}{7 \times 2} = \frac{12}{14}$ [এখানে 4 ও 6 এর ল.সা.গু. 12]

∴ ক : খ : গ = 9 : 12 : 14. (Ans.)

উদাহরণ– ১৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 : 4 : 5; কোণ তিনটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°

মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে 3x, 4x এবং 5x.

প্রশ্নানুসারে, 3x + 4x + 5x = 180° বা, x = 15°

অতএব, কোণ তিনটি হলো 3x = 3 × 15° = 45°

4x = 4 × 15° = 60°

এবং 5x = 5 × 15° = 75° (Ans.)

উদাহরণ– ১৪। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ 10% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান : মনেকরি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।

∴ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল a^2 বর্গমিটার।

10% বৃদ্ধি পেলে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হয় (a + a এর 10%) মিটার বা 1.10a মিটার।

এক্ষেত্রে, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $(1.10a)^2$ বর্গমিটার বা $1.21a^2$ বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(1.21a^2 - a^2) = 0.21a^2$ বর্গমিটার

∴ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $\frac{0.21a^2}{a^2} \times 100\% = 21\%$ (Ans.)

উদাহরণ– ১৫। তিন ব্যক্তির মধ্যে 5100 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন, ১ম ব্যক্তির অংশ : ২য় ব্যক্তির অংশ : ৩য় ব্যক্তির অংশ = $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ হয়।

সমাধান : এখানে $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{2} \times 18\right) : \left(\frac{1}{3} \times 18\right) : \left(\frac{1}{9} \times 18\right)$ [2, 3 ও 9 এর ল.সা.গু. 18]

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 9 + 6 + 2 = 17

১ম ব্যক্তির অংশ = $5100 \times \frac{9}{17}$ টাকা = 2700 টাকা

২য় ব্যক্তির অংশ = $5100 \times \frac{6}{17}$ টাকা = 1800 টাকা

৩য় ব্যক্তির অংশ = $5100 \times \frac{2}{17}$ টাকা = 600 টাকা

অতএব তিন ব্যক্তি যথাক্রমে 2700 টাকা, 1800 টাকা এবং 600 টাকা পাবেন।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১১.২

১। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $a^2 = bc$ খ $b^2 = ac$

গ ab = bc ঘ a = b = c

উত্তর : খ $b^2 = ac$

২। আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত 5 : 3; আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7:5 হবে?

ক 5 বছর খ 6 বছর

গ 8 বছর ঘ 10 বছর

উত্তর : গ. 8 বছর।

৩। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না।

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

iii. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, এদের প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$।

ওপরের তথ্যগুলোর ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : গ. i ও iii

ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত 2 : 3 : 5 এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৪। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে উহার ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে।

ক ২ গুণ খ ৪ গুণ

গ ৮ গুণ ঘ ৬ গুণ

উত্তর : খ. ৪।

৫। x : y = 7 : 5, y : z = 5 : 7 হলে x : z = কত ?

ক 35 : 49 খ 35 : 35

গ 25 : 49 ঘ 49 : 25

উত্তর : খ. 35 : 35.

৬। একটি কাঠের পুল তৈরির প্রাক্কলিত ব্যয় 90,000 টাকা। কিন্তু খরচ বেশি হয়েছে 21,600 টাকা। খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে?

সমাধান :

90000 টাকায় বৃদ্ধি 21600 টাকা

$\therefore$ 1 " " $= \frac{21600}{90000}$ টাকা

$\therefore$ 100 " " $= \frac{21600 \times 100}{90000} = 24$ টাকা

অতএব, খরচ বৃদ্ধির নির্ণেয় হার = 24% (Ans.)

৭। ধানে চাল ও তুষের অনুপাত 7 : 3 হলে, এতে শতকরা কি পরিমাণ চাল আছে?

সমাধান : মনে করি শতকরা চালের পরিমাণ = x

$\therefore$ তুষের পরিমাণ = (100 – x)

প্রশ্নমতে, x : (100 – x) = 7 : 3

বা, $\frac{x}{100-x} = \frac{7}{3}$

বা, $3x = 7(100 - x)$

বা, $3x = 700 - 7x$

বা, $3x + 7x = 700$

বা, $10x = 700$

বা, $x = \frac{700}{10}$

$\therefore x = 70$

অতএব, চালের নির্ণেয় পরিমাণ 70% (Ans.)

৮। 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

সমাধান : আমরা জানি,

1 ঘন সে.মি. পানির ওজন = 10 ডেসিগ্রাম।

দেওয়া আছে 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম।

কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা ভাগ বলতে বুঝি

$= \frac{\text{কাঠের ওজন}}{\text{পানির}} \times 100$

$= \frac{7}{10} \times 100 = 70\%$

অতএব, কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের 70% (Ans.)

৯। ক, খ, গ ও ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ 3 : 2 হয়।

সমাধান : এখানে, ক : খ = 2 : 3 = 2 : 3

খ : গ = 1 : 2 = 3 : 6

এবং গ : ঘ = 3 : 2 = 6 : 4

$\therefore$ ক : খ : গ : ঘ = 2 : 3 : 6 : 4

$\therefore$ অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল = (2 + 3 + 6 + 4) = 15

এখানে, মোট টাকার পরিমাণ = 300 টাকা

$\therefore$ ক এর টাকার পরিমাণ = 300 টাকার $\frac{2}{15}$ অংশ = 40 টাকা

$\therefore$ খ এর টাকার পরিমাণ = 300 টাকার $\frac{3}{15}$ অংশ = 60 টাকা

$\therefore$ গ এর টাকার পরিমাণ = 300 টাকার $\frac{6}{15}$ অংশ = 120 টাকা

$\therefore$ ঘ এর টাকার পরিমাণ = 300 টাকার $\frac{4}{15}$ অংশ = 80 টাকা

অতএব, ক, খ, গ ও ঘ যথাক্রমে 40, 60, 120 ও 80 টাকা পাবে। (Ans.)

১০। তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$, এবং $\frac{5}{6}$ হলে কে কয়টি মাছ পেল?

সমাধান : দেওয়া আছে, জেলেদের মাছের অংশের অনুপাত

$= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$

$= \left(\frac{2}{3} \times 30\right) : \left(\frac{4}{5} \times 30\right) : \left(\frac{5}{6} \times 30\right)$

[প্রত্যেক অনুপাতকে 30 দ্বারা গুণ করে]

= 20 : 24 : 25

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 20 + 24 + 25 = 69

১ম জেলে পাবে = 690 এর $\frac{20}{69} = 200$ টি

২য় জেলে পাবে = 690 এর $\frac{24}{69} = 240$ টি

৩য় জেলে পাবে = 690 এর $\frac{25}{69} = 250$ টি

তিনজন জেলে মাছ পেল যথাক্রমে 200 টি, 240 টি ও 250 টি (Ans.)

১১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে.মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:5:7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে.মি.

বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত = 3 : 5 : 7

$\therefore$ অনুপাতের যোগফল = 3 + 5 + 7 = 15

এখন, প্রথম বাহুর পরিমাণ = 45 এর $\frac{3}{15} = 9$ সে.মি.

দ্বিতীয় ,, ,, = 45 এর $\frac{5}{15} = 15$ সে.মি.

এবং তৃতীয় ,, ,, = 45 এর $\frac{7}{15} = 21$ সে.মি.

অতএব, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে, 9 সে.মি., 15 সে.মি., ও 21 সে.মি. (Ans).

১২। 1011 টাকাকে $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত অনুপাত $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$

$= \frac{3}{4} \times 140 : \frac{4}{5} \times 140 : \frac{6}{7} \times 140$

= 105 : 112 : 120

[4, 5 ও 7 এর ল.সা.গু 140 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 105 + 112 + 120 = 337

এখন, প্রথম অংশ = 1011 এর $\frac{105}{337} = 315$ টাকা

দ্বিতীয় ,, = 1011 এর $\frac{112}{337} = 336$,,

এবং তৃতীয় ,, = 1011 এর $\frac{120}{337} = 360$,,

অতএব বিভক্ত অংশগুলো হলো 315 টাকা, 366 টাকা ও 360 টাকা। (Ans.)

১৩। দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5:7 এবং তাদের গ.সা.গু 4 হলে সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু কত?

সমাধান : দুইটি সংখ্যার অনুপাত = 5 : 7

মনেকরি, সংখ্যা দুইটি 5x ও 7x এর ল.সা.গু = 35x

বা, $5x \times 7x = 4 \times 35x$

বা, $35x^2 = 140x$

বা, $35x = 140$

বা, $x = \frac{140}{35}$

$\therefore$ $x = 4$

$\therefore$ ল.সা.গু $= 35x = 35 \times 4 = 140$

অতএব, সংখ্যা দুইটি ল.সা.গু 140 (Ans.)

১৪। ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী একত্রে 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুর এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান : দেয়া আছে, তিনজনের মোট রান = 171

আবার, সাকিবের রান : মুশফিকুর রান = 3 : 2

এবং মুশফিকুর রান : মাশরাফীর রান : 3 : 2

$\therefore$ সাকিব : মুশফিকুর = 3 : 2 = 9 : 6 (3 দ্বারা গুণ করে)

মুশফিকুর : মাশরাফী = 3 : 2 = 6 : 4 (2 দ্বারা গুণ করে)

সাকিব : মুশফিকুর : মাশরাফী = 9 : 6 : 4

মনে করি, সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফীর রান যথাক্রমে 9x, 6x এবং 4x

প্রশ্নমতে, $9x + 6x + 4x = 171$

বা, $19x = 171$

$\therefore x = \frac{171}{19} = 9$

$\therefore$ সাকিবের রান $= 9 \times 9 = 81$

মুশফিকুর রান $= 6 \times 9 = 54$

মাশরাফীর রান $= 4 \times 9 = 36$ (Ans).

১৫। একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পাবে?

সমাধান : 1 জন পিওন 1 টাকা পেলে 3 জন পিওন পায় 3 টাকা

1 জন করণিক 2 টাকা পেলে 7 জন করণিক পায় 14 টাকা

1 জন কর্মকর্তা 4 টাকা পেলে 2 কর্মকর্তা পায় 8 টাকা

3 জন পিওন, 7 জন করণিক ও 2 জন কর্মকর্তার বেতনের অনুপাত 3 : 14 : 8

$\therefore$ মোট আনুপাতিক ভাগ $= 3 + 14 + 8 = 25$

এখানে, মোট টাকার পরিমাণ = 150,000 টাকা

সুতরাং, 3 জন পিওনের মোট বেতনের অংশ $= \frac{3}{25} \times 150,000 = 18000$ টাকা

$\therefore$ 1 জন পিওন বেতন পায় = (18000 ÷ 3) টাকা বা, 6000 টাকা।

7 জন করণিকের মোট বেতনের অংশ $= \frac{14}{25} \times 150,000$ টাকা = 84,000 টাকা

$\therefore$ 1 জন করণিকের বেতন = (84,000 ÷ 7) টাকা = 12000 টাকা।

2 জন কর্মকর্তার মোট বেতনের অংশ $= \frac{8}{25} \times 150,000$ টাকা = 48,000 টাকা

$\therefore$ 1 জন কর্মকর্তার বেতন = (48,000 ÷ 2) টাকা = 24,000 টাকা

অতএব, প্রত্যেক কর্মকর্তা পাবে 24,000 টাকা
প্রত্যেক করণিক পাবে 12000 টাকা
প্রত্যেক পিওন পাবে 6000 টাকা (Ans.)

১৬। একটি সমিতির নেতা নির্বাচনে দুইজন প্রতিদ্বন্দ্বীর মধ্যে ডোনাল সাহেব 4 : 3 ভোটে জয়লাভ করলেন। যদি মোট সদস্য সংখ্যা 581 হয় এবং 91 জন সদস্য ভোট না দিয়ে থাকে, তবে ডোনাল সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী কত ভোটের ব্যবধানে পরাজিত হয়েছেন?

সমাধান : এখানে, ডোনাল ও তার প্রতিদ্বন্দ্বীর প্রাপ্য ভোটের অনুপাত 4 : 3

মোট আনুপাতিক ভাগ = 4 + 3 = 7

ভোটদাতা সদস্যের সংখ্যা = (581 – 91) জন = 490 জন

সুতরাং, ডোনালের প্রাপ্য ভোটের সংখ্যা $= \frac{4}{7} \times 490 = 280$

∴ প্রতিদ্বন্দ্বীর ভোটের সংখ্যা $= \frac{3}{7} \times 490 = 210$

∴ ভোটের ব্যবধান = (280 – 210) বা 70 (Ans.)

১৭। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান : মনেকরি, বর্গক্ষেত্রে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = x

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গএকক

এখন, বাহুর 100 এককে বৃদ্ধি পায় 20 একক

∴ „ 1 „ „ „ $= \frac{20}{100}$ „

∴ „ x „ „ „ $= \frac{20 \times x}{100}$

বা, $= \frac{x}{5}$ „

প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ হবে, $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ একক

$= \frac{5x + x}{5}$ „

$= \frac{6x}{5}$ একক।

∴ নতুন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{6x}{5}\right)^2$ বর্গ একক

$= \frac{36x^2}{25}$ „ „

∴ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $= \left(\frac{36x^2}{25} - x^2\right)$ „

$= \left(\frac{36x^2 - 25x^2}{25}\right)$ „

$= \frac{11x^2}{25}$ বর্গ একক

এখন x^2 বর্গ এককে বৃদ্ধি পায় $\frac{11x^2}{25}$ বর্গ একক

∴ 1 „ „ „ „ $= \frac{11x^2}{25 \times x^2}$ „

∴ 100 „ „ „ $= \frac{11x^2 \times 100}{25 \times x^2}$ „

= 44 বর্গ একক

অতএব ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির নির্ণেয় হার 44%

১৮। একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7; ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পর তার ফলন কত হবে?

সমাধান : দেয়া আছে, সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত = 4 : 7

মনে করি, আগের ফলন = 4x কুইন্টাল

তাহলে, সেচের পর ফলন = 7x কুইন্টাল

প্রশ্নমতে, 4x = 304

বা, $x = \frac{304}{4} = 76$

∴ সেচের পর ফলন = 7x = 7 × 76 কুইন্টাল = 532 কুইন্টাল

অতএব, সেচ পাওয়ার পর ফলন 532 কুইন্টাল। (Ans.)

২০। ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3:2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4:3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

সমাধান : এখানে, ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত = 3 : 2

$= \frac{3}{3} : \frac{2}{3}$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

$= 1 : \frac{2}{3}$

আবার, গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত = 4 : 3

$= \frac{4}{4} : \frac{3}{4}$ [4 দ্বারা ভাগ করে]

$= 1 : \frac{3}{4}$

$\therefore$ চাল : সুজি $= \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

$= \frac{2 \times 12}{3} : \frac{3 \times 12}{4}$ [অনুপাতের রাশিদ্বয়কে 12 দ্বারা গুণ করে]

$= 8 : 9$ (Ans.)

২১। একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3:4 এবং 2:5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : প্রথম জমির দৈর্ঘ্য : দ্বিতীয় জমির দৈর্ঘ্য = 3 : 4

প্রথম জমির প্রস্থ : দ্বিতীয় জমির প্রস্থ = 2 : 3

মনে করি, প্রথম জমির দৈর্ঘ্য 3x মিটার

ও দ্বিতীয় জমির দৈর্ঘ্য 4x মিটার

এবং প্রথম জমির প্রস্থ প্রস্থ 2y মিটার

ও দ্বিতীয় জমির প্রস্থ 5y মিটার

$\therefore$ প্রথম জমির ক্ষেত্রফল $= 3x.\ 2y = 6xy$ বর্গ মিটার

এবং দ্বিতীয় জমির ক্ষেত্রফল $= 4x.\ 5y = 20xy$ বর্গ মিটার

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $6xy = 432$

$\therefore xy = 72$

$\therefore$ দ্বিতীয় জমির ক্ষেত্রফল $= (20 \times 72)$ বর্গ মি.

$= 1440$ বর্গ মি.

অতএব, অপর জমির নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 1440 বর্গমিটার।

২২। জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত বের কর।

সমাধান : মনে করি, জেমি ধার করে p টাকা এবং সিমি ধার করে q টাকা।

জেমি 100 টাকায় 1 বছরে মুনাফা দেয় 10 টাকা

$\therefore$ " 1 " 1 " " " $\frac{10}{100}$ "

$\therefore$ " p " 2 " " " $\frac{10 \times p \times 2}{100}$ "

$= \frac{p \times 20}{100} = \frac{p}{5}$ টাকা।

মুনাফা-আসল $= \left(p + \frac{p}{5}\right)$ টাকা

$= \frac{5p + p}{5}$ " $= \frac{6p}{5}$ "

100 টাকায় 1 বছরে মুনাফা দেয় 10 টাকা

$\therefore$ " 1 " 1 " " " $\frac{10}{100}$ "

$\therefore$ " q " 3 " " " $\frac{10 \times q \times 3}{100}$ " $= \frac{3q}{10}$ টাকা।

$\therefore$ গিমির মুনাফা-আসল $= \left(q + \frac{3q}{10}\right)$ টাকা

$= \frac{10q + 3q}{10}$ "

$= \frac{13q}{10}$ "

প্রশ্নানুসারে, $\frac{6p}{5} = \frac{13q}{10}$

বা, $60p = 65q$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{65}{60}$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{13}{12}$

$\therefore p : q = 13 : 12$

অতএব, জেমি ও গিমির ঋণের নির্ণেয় অনুপাত = 13 : 12.

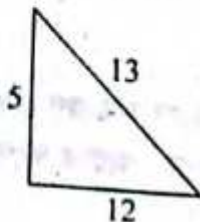
২৩। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.।

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণ ভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লেখ? ২

খ) বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ) উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে? ৪

সমাধান:

ক) কোন ভেদে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। কারণ ত্রিভুজের এক বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

খ) মনে করি,

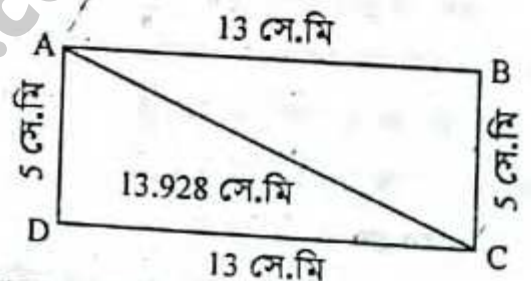
১ম বাহুর দৈর্ঘ্য = 5x সে.মি.
২য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 12x সে.মি.
৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 13x সে.মি.

প্রশ্নমতে, $5x + 12x + 13x = 30$

বা, $30x = 30$

$\therefore x = 1$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 সে.মি.

$\therefore$ বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি.
এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 5 সে.মি.

আয়তক্ষেত্রের কর্ণ, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{(13)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{169 + 25}$

$= \sqrt{194} = 13.928$ সে.মি.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য = 13.928 সে.মি.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(13.928)^2$ সে.মি.

= 194 বর্গ সে.মি. (Ans.)

গ) আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল (13×5) বর্গ সে.মি.

= 65 বর্গ সে.মি.

10% বৃদ্ধিতে, নতুন আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য হয়

= (13 + 13 এর 10%) সে.মি.

$= \left(13 + 13 \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ সে.মি.

$= \left(13 + 13 \text{ এর } \frac{1}{10}\right)$ সে.মি.

$= \left(13 + \frac{13}{10}\right)$ সে.মি.

$= \frac{130 + 13}{10}$ সে.মি.

$= \frac{143}{10}$ সে.মি.

= 14.3 সে.মি.

20% বৃদ্ধিতে, নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ

= (5 + 5 এর 20%) সে.মি.

= $\left(5 + 5 \text{ এর } \frac{20}{100}\right)$ সে.মি.

= (5 + 1) সে.মি.

= 6 সে.মি.

নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= (14.3 × 6) বর্গ সে.মি.

= 85.8 বর্গ সে.মি.

∴ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায়

= (85.8 – 65) বর্গ সে.মি.

= 20.8 বর্গ সে.মি.

ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় = $\frac{20.8}{65} \times 100$

= 32

সুতরাং ক্ষেত্রফল 32% বৃদ্ধি পাবে। (Ans.)

১৪। একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1 : 4।

ক) অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর। ২

খ) 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1 : 9 মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত? ৪

গ) মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

সমাধান :

ক) মনে করি,

অনুপস্থিত শিক্ষার্থী = x জন

উপস্থিত " = 4x "

∴ মোট " = x + 4x "

= 5x জন

∴ অনুপস্থিত শিক্ষার্থী মোট শিক্ষার্থীর = $\frac{x}{5x} \times 100\%$

= 20% (Ans.)

খ) 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত থাকলে,

অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x – 10 জন

উপস্থিত " " = 4x + 10 জন

প্রশ্নমতে, x – 10 : 4x + 10 = 1 : 9

বা, $\frac{x-10}{4x+10} = \frac{1}{9}$

বা, 9x – 90 = 4x + 10

বা, 9x – 4x = 90 + 10

বা, 5x = 100

∴ x = 20

∴ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 5 × 20 = 100 (Ans.)

গ) মনে করি, ছাত্রী সংখ্যা y জন

∴ ছাত্র সংখ্যা = (2y – 20) জন

শর্তানুসারে,

y + (2y – 20) = 100

বা, 3y = 120

বা, y = 40

∴ ছাত্রী সংখ্যা 40 জন

ছাত্র সংখ্যা = (2 × 40 – 20) জন

= 60 জন

∴ ছাত্র : ছাত্রী = 60 : 40 = 3 : 2

∴ ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যার অনুপাত = 3 : 2 (Ans.)

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. মা ও মেয়ের বয়সের অনুপাত 5 : 2, মায়ের বয়স 40 বছর হলে, মেয়ের বয়স কত?
[মৌলভীবাজার সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]
ক 16 বছর খ 18 বছর
গ 12 বছর ঘ 24 বছর (ক)

২. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে কোনটি সঠিক?
[হুমায়রা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]
ক a : b = c : b খ ab = bc
গ a : c = b : c ঘ ac = b^2 (ঘ)

৩. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 ও সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 21 হলে বৃহত্তর সংখ্যাটি কত?
[হুমায়রা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]
খ 12
ঘ 18 (খ)

৪. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং ল. সা. গু. 180 সংখ্যা দুটি কত?
[বগুড়া জিলা স্কুল]
ক 60 ও 40 খ 45 ও 55
গ 45 ও 50 ঘ 45 ও 60 (ঘ)

৫. কোনো স্কুলে ছাত্র ও ছাত্রীর অনুপাত 1 : 2 ঐ স্কুলে মোট শিক্ষার্থী 900 হলে ছাত্রী সংখ্যা নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 100 খ 200
গ 300 ঘ 600 (ঘ)

৬. x : y = 2 : 3 হলে 3x : 4y এর মান নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 1 : 2 খ 2 : 1
গ 2 ; 3 ঘ 3 : 4 (ক)

৭. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 15 এবং তাদের অনুপাত 1 : 2 হলে, সংখ্যা দুইটি কত?
[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক 5 ও 10 খ 12 ও 3
গ 9 ও 6 ঘ 8 ও 7 (ক)

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে।
- সমাধানের আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট : যদি দুই চলক বা অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ এরূপ হয় যে, চলকদ্বয়ের এক বা একাধিক কোনো মান দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়, তবে এদেরকে দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট বলে। যেমন—

$4x + y = 2$ .... (i)

এবং $2x + 3y = -4$ .... (ii)

সমীকরণদ্বয় দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট। $x = 1, y = -2$ এর জন্য সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয় অর্থাৎ উভয় পার্শ্ব সমান হয়।

সঙ্গতিপূর্ণ ও অসঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ জোট :

কোনো সমীকরণের এক বা একাধিক সমাধান থাকলে, সমীকরণ জোটকে সঙ্গতিপূর্ণ বলা হয়।

কোনো সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান না থাকলে এদেরকে অসঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ জোট বলে।

কোনো সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ ও অসঙ্গতিপূর্ণ হওয়ার শর্ত :

ক. $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ হবে যদি

i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ [এক্ষেত্রে একটি সমাধান আছে]

ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়, [এক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান আছে]

খ. $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়। [এরূপ ক্ষেত্রে কোনো সমাধান নেই]

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান :

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধানের অনেক পদ্ধতি রয়েছে। যেমন—

1. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি
2. অপনয়ন পদ্ধতি
3. বজ্রগুণন পদ্ধতি
4. নির্ণায়ক পদ্ধতি
5. লৈখিক পদ্ধতি।

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধানের ক্ষেত্রে পরীক্ষায় কোনো পদ্ধতির উল্লেখ করা না থাকলে নিজের সুবিধামতো উপরোল্লিখিত পদ্ধতিগুলোর যে কোনো একটি পদ্ধতি অনুসরণ করে অংকের সমাধান করলেই চলবে।

❀ প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে কোনো একটি থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপরটিতে প্রতিস্থাপন করা হয়।

যেমন— $4x + y = 2$............. (i)

$2x + 3y = -4$ ....(ii)

ওপরের সমীকরণদ্বয়ের যেকোনো একটি যেমন (i) থেকে যে কোনো একটি অজ্ঞাত রাশি যেমন y এর মান বের করলে দাঁড়ায় $y = 2 - 4x$. এই y এর মান অপর সমীকরণ যেমন (ii) এ প্রতিস্থাপন করে সমাধান করা হয়।

❀ অপনয়ন পদ্ধতি

অপনয়ন পদ্ধতি : এ প্রক্রিয়ায় যোগ বা বিয়োগ করে দুটি অজ্ঞাত রাশির যে কোনো একটিকে অপসারণ করতে হয়। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনো একটিকে সমান করার জন্য সমীকরণকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়। যেমন—

$4x + y = 2$ ....(i)

$2x + 3y = -4$ ......(ii)

এই সমীকরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে (i) সমীকরণকে 3 দ্বারা গুণ করলে উভয় সমীকরণের y এর সহগ সমান হয়। এর পর বিয়োগ করে সহজেই y কে অপসারণ করা যায়। যেমন—

$12x + 3y = 6$

$2x + 3y = -4$

বিয়োগ করে, $10x = 10$

$\therefore x = 1$

❋ বজ্রগুণন বা আড়গুণন পদ্ধতি

বজ্রগুণন পদ্ধতি : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধানের ক্ষেত্রে বজ্রগুণন সূত্রটি হল :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অর্থাৎ, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ....(i)

এবং $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ....(ii)

(i) এবং (ii) সমীকরণদ্বয় থেকে সমাধান করে x ও y এর মান পাওয়া যায়।

❋ লৈখিক পদ্ধতি

❑ **লৈখিক পদ্ধতি** : লৈখিক পদ্ধতির মাধ্যমে দুই চলক বা অজ্ঞাত রাশি x ও y বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। সমীকরণ জোটের প্রতিটি একটি সরল সমীকরণ। এই সমীকরণ জোটের লেখ অংকন করলে দুটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর ভুজ ও কোটি প্রদত্ত সমীকরণের জোটের বীজ। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজ x এর মান এবং কোটি y এর মান নির্দেশ করে।

❑ **লেখচিত্রের মাধ্যমে সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি :**
লেখ অংকন করে দুটি সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের ধাপগুলো নিম্নরূপ—

- প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে y = mx + c আকারে প্রকাশ করতে হবে।
  যেমন : ax + by + c = 0 কে নিম্নরূপে প্রকাশ করতে হবে,
  ax + by + c = 0
  বা, by = – ax – c
  বা, $y = \frac{-ax - c}{b}$
- প্রতিটি সমীকরণে x-এর কমপক্ষে 3 টি সুবিধাজনক মান বসিয়ে y-এর অনুরূপ মানসমূহ বের করতে হবে। প্রাপ্ত x ও y এর মানসমূহ নিম্নোক্ত টেবিলে স্থাপন করতে হবে।

x			
y			

- প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করতে হবে।
- ভগ্নাংশের জটিলতা পরিহারের জন্য ছক কাগজে বিন্দু স্থাপনের জন্য সুবিধামতো এক এককে এক ঘর, দুই ঘর, তিন ঘর ইত্যাদি ধরতে হবে।
- প্রথম সমীকরণের জন্য বিন্দু তিনটিকে যুক্ত করে প্রথম সমীকরণের লেখ অংকন করতে হবে।
- অনুরূপে দ্বিতীয় সমীকরণ নির্দেশক সরলরেখাটিও ছক কাগজে অংকন করতে হবে।
- প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় করতে হবে।
- নির্ণেয় ভুজ ও কোটিই প্রদত্ত সমীকরণ জোটের বীজ।
- অংকিত সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, প্রদত্ত সমীকরণ জোটের কোনো বীজ বা সমাধান নেই এবং সমীকরণ জোটটি অসংগতিপূর্ণ।

❑ অনুশীলনী- ১২.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ **কাজ :** x – 2y + 1 = 0 ও 2x + y –3 = 0 সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটির পাঁচটি করে সমাধান লেখ যেন তন্মধ্যে সাধারণ সমাধানটিও থাকে। [পৃষ্ঠা–১৯৫]

সমাধান : প্রথমে আমরা, x – 2y + 1 = 0 সমীকরণটি বিবেচনা করি।
এখন, x – 2y + 1 = 0 সমীকরণটি থেকে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ (x – 2y + 1) এর মান	ডানপক্ষ
1	1	1 – 2 + 1 = 0	0
–1	0	– 1 – 0 + 1 = 0	0
3	2	3 – 4 + 1 = 0	0
5	3	5 – 6 + 1 = 0	0
7	4	7 – 8 + 1 = 0	0
....		.... = 0	0

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে পাঁচটি সমাধান (–1, 0), (1, 1), (3, 2), (5, 3) (7, 4)।

আবার অন্য একটি সমীকরণ 2x + y – 3 = 0 নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ (2x + y – 3) এর মান	ডানপক্ষ
–2	7	–4 + 7 – 3 = 0	0
0	3	0 + 3 – 3 = 0	0
1	1	2 + 1 – 3 = 0	0
2	–1	4 – 1 – 3 = 0	0
3	–3	6 – 3 – 3 = 0	0
....		.... = 0	0

সমীকরণটিতে অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে পাঁচটি সমাধান (–2, 7), (0, 3), (1, 1), (2, –1), (3, – 3)।
যদি আলোচ্য সমীকরণ দুটিকে একত্রে জোট হিসেবে ধরা হয় তবে একমাত্র (1, 1) দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়।
∴ সমীকরণ জোট x – 2y + 1 = 0 এবং 2x + y – 3 = 0 এর সাধারণ সমাধান (x, y) = (1, 1)

প্রশ্ন : $x - 2y + 1 = 0, 2x + y - 3 = 0$ সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ কিনা, পরস্পর নির্ভরশীল কিনা যাচাই কর এবং সমীকরণজোটটির কয়টি সমাধান থাকতে পারে তা নির্দেশ কর। [পৃষ্ঠা-১৯৮]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণজোট

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ \text{বা, } x - 2y = -1 \\ \text{এবং } 2x + y - 3 = 0 \\ \text{বা, } 2x + y = 3 \end{array}\right\}$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{-2}{1}$ বা, -2

আমরা পাই, $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$

∴ সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ : নিচের সমীকরণ জোটগুলো সঙ্গতিপূর্ণ/অসঙ্গতিপূর্ণ, নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না ব্যাখ্যা কর এবং এদের সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

ক) $x + 3y = 1$
$2x + 6y = 2$

খ) $2x - 5y = 3$
$x + 3y = 1$

গ) $3x - 5y = 7$
$6x - 10y = 15$

সমাধান :

ক) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

y " " " $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অতএব, সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

খ) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{1}$

y " " " $\frac{-5}{3}$

আমরা পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3}$

∴ সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

অতএব, সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

গ) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $3x - 5y = 7$
$6x - 10 = 15$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

y " " " $\frac{-3}{-10}$ বা $\frac{3}{10}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{15}$

আমরা পাই, $\frac{3}{6} \neq \frac{-3}{-10} \neq \frac{7}{15}$

∴ সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির কোনো সমাধান নেই।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সঙ্গতিপূর্ণ/অসঙ্গতিপূর্ণ পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর :

১। $x - y = 4$
$x + y = 10$

সমাধান : $x - y = 4$ .... (i)
$x + y = 10$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণকে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a_1 = 1, b = -1, c_1 = 4$ এবং $a^2 = 1, b^2 = 1$ এবং $c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{1} = -1$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

∴ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং সমাধান একটি।

২। $2x + y = 3$

$4x + 2y = 6$

সমাধান : $2x + y = 3$ .... (i)

$4x + 2y = 6$ .... (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 3$ এবং $a_2 = 4, b_2 = 2$ এবং $c_2 = 6$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

সুতরাং সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ, নির্ভরশীল এবং অসংখ্য সমাধান বিদ্যমান।

৩। $x - y - 4 = 0$

$3x - 3y - 10 = 0$

সমাধান : $x - y - 4 = 0$ বা, $x - y = 4$ .... (i)

$3x - 3y - 10 = 0$ বা, $3x - 3y = 10$ ..... (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 4$ এবং $a_2 = 3, b_2 = -3$ এবং $c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই।

৪। $3x + 2y = 0$

$6x + 4y = 0$

সমাধান : $3x + 2y = 0$ .... (i)

$6x + 4y = 0$ .... (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 6, b_2 = 4, c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

অর্থাৎ সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং এর কোনো সমাধান নেই।

৫। $3x + 2y = 0$

$9x - 6y = 0$

সমাধান : $3x + 2y = 0$ .... (i)

$9x - 6y = 0$ .... (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 9, b_2 = -6$ এবং $c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-6} = \frac{1}{-3}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

অতএব, সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং একটি মাত্র সমাধান আছে।

৬। $5x - 2y - 16 = 0$

$3x - \frac{6}{5}y = 2$

সমাধান : $5x - 2y - 16 = 0$ বা, $5x - 2y = 16$ .... (i)

$3x - \frac{6y}{5} = 2$

বা, $\frac{15x - 6y}{5} = 2$ বা, $15x - 6y = 10$ .... (ii)

(i) নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii) নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 5, b_1 = -2, c_1 = 16$ এবং $a_2 = 15, b_2 = -6, c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

অতএব সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, পরস্পর অনির্ভরশীল এবং কোনো সমাধান নেই।

৭। $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x - 2y = 2$

সমাধান : $-\frac{1}{2}x + y = -1$ .... (i)

$x - 2y = 2$ .... (ii)

(i) নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = 1, c_1 = -1$ এবং $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 2$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-1}{2}$

যেহেতু $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

অতএব, সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ এবং এরূপ জোটের অসংখ্য সংখ্যার অসংখ্য সমাধান রয়েছে।

৮। $\frac{-1}{2}x - y = 0$

$x - 2y = 0$

সমাধান: $-\frac{1}{2}x - y = 0$ .... (i)

$x - 2y = 0$ .... (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = \frac{-1}{2}, b_1 = -1, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

যেহেতু $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ এবং এর সমাধান অনন্য।

৯। $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x + y = 5$

সমাধান: $-\frac{1}{2}x + y = -1$ .... (i)

$x + y = 5$ .... (ii)

এই সমীকরণ জোটে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$

∴ এখানে, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ জোটের সমাধান অনন্য।

১০। $ax - cy = 0$

$cx - ay = c^2 - a^2$

সমাধান: $ax - cy = 0$ .... (i)

$cx - ay = c^2 - a^2$ ....(ii)

প্রদত্ত সমীকরণে x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{a}{c}$

এবং y " " " $= \frac{-c}{-a} = \frac{c}{a}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{0}{c^2 - a^2}$

সুতরাং $\frac{a}{c} \neq \frac{c}{a}$

অতএব সমীকরণটি সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল, যার একটি মাত্র সমাধান আছে।

অনুশীলনী- ১২.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-৩ : $\left.\begin{array}{l} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y \quad = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটকে $\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটের আকারে প্রকাশ করে $a_1, b_1, c_1, a_1, b_1, c_2$ এর মান বের কর। [পৃষ্ঠা ২০১]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট $\left.\begin{array}{l} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y \quad = 0 \end{array}\right\}$

প্রদত্ত সমীকরণজোটকে $\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটের আকারে প্রকাশ করলে পাওয়া যায়,

∴ $a_1 = 4, b_1 = -1, c_1 = -7,$

$a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = 0$ (Ans.)

বা, $\frac{x}{-552} = \frac{y}{-276} = \frac{1}{-46}$

বা, $\frac{x}{552} = \frac{y}{276} = \frac{1}{46}$

$\therefore \frac{x}{552} = \frac{1}{46}$ বা, $x = \frac{552}{46} = 12$

আবার, $\frac{y}{276} = \frac{1}{46}$ বা, $y = \frac{276}{46} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (12, 6)$

প্রশ্ন-৬। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $\left.\begin{matrix} ax - by = ab \\ bx - ay = ab \end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix} ax - by - ab = 0 \\ bx - ay - ab = 0 \end{matrix}\right\}$

$\therefore \frac{x}{(-b) \times (-ab) - (-a)(-ab)} = \frac{y}{(-a) \times b - (-ab) \times a} = \frac{1}{a \times (-a) - b \times (-b)}$

বা, $\frac{-x}{ab^2 - a^2b} = \frac{y}{-ab^2 - a^2b} = \frac{1}{-a^2 + b^2}$

বা, $\frac{x}{-ab(a-b)} = $ [illegible]

বা, $\frac{x}{ab(a-b)} = \frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore \frac{x}{ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$

বা, $x = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$

আবার, $\frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$

বা, $y = \frac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-ab}{a+b}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{-ab}{a+b}\right)$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১২.২

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১ – ৩) :

১। $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

সমাধান : $7x - 3y = 31$ .... (i)
$9x - 5y = 41$ .... (ii)

(i)নং হতে পাই, $7x = 31 + 3y$

বা, $x = \frac{31 + 3y}{7}$ .... (iii)

x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$9\left(\frac{31 + 3y}{7}\right) - 5y = 41$

বা, $\frac{279 + 27y}{7} - 5y = 41$

বা, $\frac{279 + 27y - 35y}{7} = 41$

বা, $279 - 8y = 287$

বা, $-8y = 287 - 279$

বা, $-8y = 8$

বা, $y = \frac{8}{-8}$

$\therefore y = -1$

এখন y এর মান (iii)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = \frac{31 + 3(-1)}{7}$

$= \frac{31 - 3}{7}$

$= \frac{28}{7}$

$= 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, -1)$

২। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

সমাধান : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{3x + 2y}{6} = 1$

বা, $3x + 2y = 6$ .... (i)

এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

বা, $\frac{2x + 3y}{6} = 1$

বা, $2x + 3y = 6$ ....(ii)

(i)নং হতে পাই, $3x = 6 - 2y$

$\therefore x = \frac{6 - 2y}{3}$ .... (iii)

x এর মান (ii)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2\left(\frac{6 - 2y}{3}\right) + 3y = 6$

বা, $\frac{12 - 4y}{3} + 3y = 6$

বা, $\frac{12 - 4y + 9y}{3} = 6$

বা, $12 + 5y = 18$

বা, $5y = 18 - 12$

বা, $5y = 6$

$\therefore y = \frac{6}{5}$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

এখন, $\frac{x}{-21} = \frac{1}{-7}$ আবার, $\frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

বা, $-7x = -21$ বা, $-7y = -14$

বা, $x = \frac{21}{7}$ $\therefore y = \frac{14}{7} = 2$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

শুদ্ধি পরীক্ষা :

$x + 2y = 7$ - - - - (i)

$2x - 3y = 0$ - - - - - (ii)

(i) নং সমীকরণে $x = 3$ এবং $y = 2$ মান বসিয়ে পাই,

$x + 2y = 7$

বা, $3 + 2.2 = 7$

বা, $3 + 4 = 7$

বা, $7 = 7$

আবার, (ii) নং সমীকরণে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

$2x - 3y = 0$

বা, $2.3 - 3.2 = 0$

বা, $6 - 6 = 0$

বা, $0 = 0$

$\therefore$ সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা প্রমাণিত হল।

১০। $4x + 3y = -12$

$2x = 5$

সমাধান : $4x + 3y = -12$

বা, $4x + 3y + 12 = 0$ .... (i)

এবং $2x = 5$

বা, $2x + 0 - 5 = 0$ .... (ii)

(i) ও (ii)নং কে আড়গুণন করে পাই,

$$\frac{x}{-15 - (0\cdot12)} = \frac{y}{12\cdot2 - (-5\cdot4)} = \frac{1}{(4\cdot0) - (2\cdot3)}$$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{24 + 20} = \frac{1}{-6}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

এখন, $\frac{x}{-15} = \frac{1}{-6}$ এবং $\frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

বা, $\frac{x}{15} = \frac{1}{6}$ বা, $y = \frac{44}{-6}$

বা, $x = \frac{15}{6}$ $\therefore y = -\frac{22}{3}$

$\therefore x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-22}{3}\right)$

১১। $-7x + 8y = 9$

$5x - 4y = -3$

সমাধান : দেয়া আছে,

$-7x + 8y = 9$

অর্থাৎ $-7x + 8y - 9 = 0$ - - - - (i)

এবং $5x - 4y = -3$

অর্থাৎ $5x - 4y + 3 = 0$ - - - - - (ii)

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{x}{8 \times 3 - (-9) \times (-4)} = \frac{y}{-9 \times 5 - (-7) \times 3} = \frac{1}{-7 \times (-4) - 5 \times 8}$$

বা, $\frac{x}{24 - 36} = \frac{y}{-45 + 21} = \frac{1}{28 - 40}$

বা, $\frac{x}{-12} = \frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

এখন, $\frac{x}{-12} = \frac{1}{-12}$ আবার, $\frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

বা, $-12x = -12$ বা, $-12y = -24$

$\therefore x = \frac{12}{12}$ বা, $y = \frac{24}{12}$

$\therefore x = 1$ $\therefore y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, 2)$

শুদ্ধি পরীক্ষা : সমীকরণ (i) এ বামপক্ষ $= -7x + 8y - 9$

$= -7 \times 1 + 8 \times 2 - 9$ [$\therefore x = 1, y = 2$ বসিয়ে]

$= -7 + 16 - 9 = -16 + 16 = 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $-7x + 8y = 9$ সমীকরণটি $(1, 2)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 5x - 4y + 3$

$= 5 \times 1 - 4 \times 2 + 3$ [$\because x = 1, y = 2$ বসিয়ে]

$= 5 - 8 + 3 = 8 - 8 = 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $5x - 4y + 3 = 0$ সমীকরণটি $(1,2)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে। (প্রমাণিত)

১২। $3x - y - 7 = 0 = 2x + y - 3$

সমাধান : $3x - y - 7 = 0$ .... (i)

$2x + y - 3 = 0$ .... (ii)

(i)নং ও (ii)নং কে আড়গুণন করে পাই,

$$\frac{x}{(-1)\cdot(-3) - 1(-7)} = \frac{y}{-7(2) - (-3)\cdot3} = \frac{1}{3\cdot1 - 2\cdot(-1)}$$

বা, $\frac{x}{3 + 7} = \frac{y}{-14 + 9} = \frac{1}{3 + 2}$

বা, $\frac{x}{10} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

এখন, $\frac{x}{10} = \frac{1}{5}$ এবং $\frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

বা, $x = \frac{10}{5}$ বা, $y = \frac{-5}{5}$

$\therefore x = 2$ $\therefore y = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, -1)$

১৩। $ax + by = a^2 + b^2$

$2bx - ay = ab$

সমাধান : দেয়া আছে, $ax + by = a^2 + b^2$ ....(i)

$2bx - ay = ab$.....................(ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণকে পক্ষান্তর করে পাই,

$ax + by - (a^2 + b^2) = 0$

$2bx - ay - ab = 0$

উপরোক্ত সমীকরণদ্বয়ে বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{b\times(-ab)-(-a)\{-(a^2+b^2)\}}=\frac{y}{-(a^2+b^2)\times 2b-(-ab)\times a}=\frac{1}{-a\times a-2b\times b}$$

বা, $\frac{x}{-ab^2-a^3-ab^2}=\frac{y}{-2a^2b-2b^3+a^2b}=\frac{1}{-a^2-2b^2}$

বা, $\frac{x}{-a^3-2ab^2}=\frac{y}{-a^2b-2b^3}=\frac{1}{-a^2-2b^2}$

বা, $\frac{x}{-a(a^2+2b^2)}=\frac{y}{-b(a^2+2b^2)}=\frac{1}{-(a^2+2b^2)}$

বা, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{1}{1}$ [ত্রিপক্ষকে $-(a^2+2b^2)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $x=\frac{a}{1}=a$ এবং $y=\frac{b}{1}=b$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(a, b)$.

শুদ্ধি পরীক্ষা :

(i) নং সমীকরণ এর বামপক্ষ $= ax + by$

$= a\times a+b\times b$ [$x=a, y=b$ বসিয়ে]

$= a^2+b^2$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $ax+by=a^2+b^2$ সমীকরণটি (a, b) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 2bx - ay$

$= 2b\times a-a\times b$ [$\because x=a, y=b$ বসিয়ে]

$= 2ab-ab=ab$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore 2bx-ay=ab$ সমীকরণটি (a, b) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

১৪। $y(3+x)=x(6+y)$

$3(3+x)=5(y-1)$

সমাধান : দেয়া আছে,

$y(3+x)=x(6+y)$ ....(i)

$3(3+x)=5(y-1)$......................(ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$3y+xy=6x+xy$

বা, $6x+xy-3y-xy=0$

বা, $6x-3y=0$

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $9+3x=5y-5$

বা, $3x-5y+9+5=0$

বা, $3x-5y+14=0$

অর্থাৎ (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ দুটির ভিন্ন রূপ হল–

$6x-3y+0=0$ ....(iii)

$3x-5y+14=0$ ....(iv)

এখন, (iii) নং এবং (iv) নং-সমীকরণে বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-3)\times 14-(-5)\times 0}=\frac{y}{3\times 0-6\times 14}=\frac{1}{6\times(-5)-3(-3)}$$

বা, $\frac{x}{-42+0}=\frac{y}{0-84}=\frac{1}{-30+9}$

বা, $\frac{x}{-42}=\frac{y}{-84}=\frac{1}{-21}$

$\therefore x=\frac{-42}{-21}=2$ এবং $y=\frac{-84}{-21}=4$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(2, 4)$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

সমীকরণ (i) ও (ii) এ x ও y এর মান যথাক্রমে 2 ও 4 বসালে যদি উভয়পক্ষ অর্থাৎ বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমান হয়, তবে সমীকরণ দুইটি (2, 4) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (i) এর বামপক্ষ $= y(3+x)$

$= 4(3+2)=4\times 5=20$

এবং ডানপক্ষ $= x(6+y)$

$= 2(6+4)=2\times 10=20$

$\therefore$ $y(3+x)=x(6+y)$ সমীকরণটি (2, 4) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

আবার, সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 3(3+x)$

$= 3(3+2)=3\times 5=15$

এবং ডানপক্ষ $= 5(y-1)$

$= 5(4-1)$

$= 5\times 3=15$

$\therefore$ $3(3+x)=5(y-1)$ সমীকরণটি (2, 4) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

১৫। $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5$

$5x-11y+35=0$

সমাধান : দেয়া আছে, $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5$ -----------(i)

$5x-11y+35=0$ ------------------------------------(ii)

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5$

বা, $xy-3x+7y-21+7=xy+3x-y-3+5$

বা, $xy-3x+7y-14-xy-3x+y-2=0$

বা, $-6x+8y-16=0$

বা, $-2(3x-4y+8)=0$

বা, $3x-4y+8=0$ - - - - - (iii) [উভয় পক্ষকে –2 দ্বারা ভাগ করে]

সমীকরণ (ii) ও (iii) হইতে পাই

$5x-11y+35=0$ - - - - (ii)

$3x-4y+8=0$ - - - - - (iii)

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে, $\frac{x}{-11\times 8-(-4)\times 35}=\frac{y}{3\times 35-5\times 8}=\frac{1}{-4\times 5-3\times(-11)}$

বা, $\frac{x}{-88+140} = \frac{y}{105-40} = \frac{1}{-20+33}$

বা, $\frac{x}{52} = \frac{y}{65} = \frac{1}{13}$

এখন, $\frac{x}{52} = \frac{1}{13}$

বা, $13x = 52$

বা, $x = \frac{52}{13}$

$\therefore x = 4$

আবার, $\frac{y}{65} = \frac{1}{13}$

বা, $13y = 65$

বা, $y = \frac{65}{13}$

$\therefore y = 5$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, 5)$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

সমীকরণ (i) এর বামপক্ষ $= (x + 7)(y - 3) + 7$
$= (4 + 7)(5 - 3) + 7$; [x ও y এর মান বসিয়ে]
$= 11 \times 2 + 7 = 22 + 7 = 29$

ডানপক্ষ $= (y + 3)(x - 1) + 5$
$= (5 + 3)(4 - 1) + 5$; [x ও y এর মান বসিয়ে]
$= 8 \times 3 + 5 = 24 + 5 = 29$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore (x + 7)(y - 3) + 7 = (y + 3)(x - 1) + 5$ সমীকরণটি (4, 5) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

আবার, সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 5x - 11y + 35$
$= 5 \times 4 - 11 \times 5 + 35$ [x ও y এর মান বসিয়ে]
$= 20 - 55 + 35 = 55 - 55 = 0$
= ডানপক্ষ

$\therefore 5x - 11y + 35 = 0$ সমীকরণটি (4, 5) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

❑ অনুশীলনী- ১২.৩

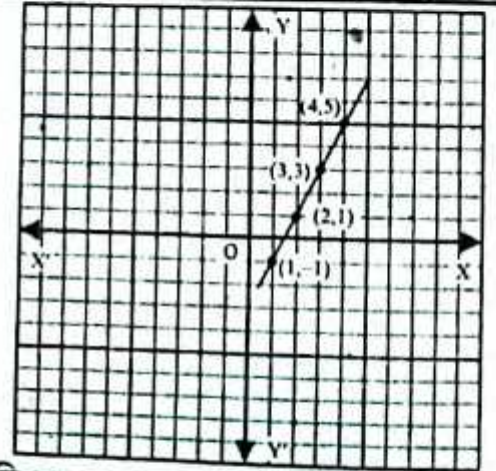
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ **কাজ :** $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের লেখের উপর ছকের মাধ্যমে চারটি বিন্দু নির্ণয় কর। অতঃপর ছক কাগজে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত কর। লেখটি কি সরলরেখা হয়েছে?

[পৃষ্ঠা- ২১০]

সমাধান : $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের x এর চারটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ চারটি মান বের করি এবং ছকে উপস্থাপন করি।

x	1	2	3	4
y	−1	1	3	5

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু (1, −1) (2, 1) (3, 3) (4, 5)

মনে করি XOX′ ও YOY′ যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম [illegible] প্রতি [illegible] হুর [illegible] দৈর্ঘ্য [illegible] একক ধরি।

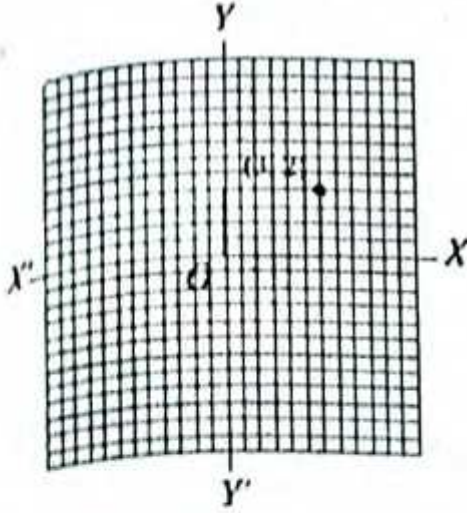
এখন ছক কাগজে সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত (1, −1) (2, 1) [illegible] 3) [illegible] 5) [illegible] এবং [illegible] বিন্দুগুলো পরস্পর স[illegible] করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-৭। সমাধান কর ও সমাধান লেখচিত্রে দেখাও :

$$2x + y = 8$$
$$3x - 2y = 5$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + y - 8 = 0$ .... (i)

$3x - 2y - 5 = 0$ .... (ii)

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{1 \times (-5) - (-2) \times (-8)} = \frac{y}{(-8) \times 3 - (-5) \times 2} = \frac{1}{2(-2) - 3 \times 1}$$

বা, $\frac{x}{-5-16} = \frac{y}{-24+10} = \frac{1}{-4-3}$

বা, $\frac{x}{-21} = \frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

বা, $\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{21} = \frac{1}{7}$, বা, $x = \frac{21}{7} = 3$

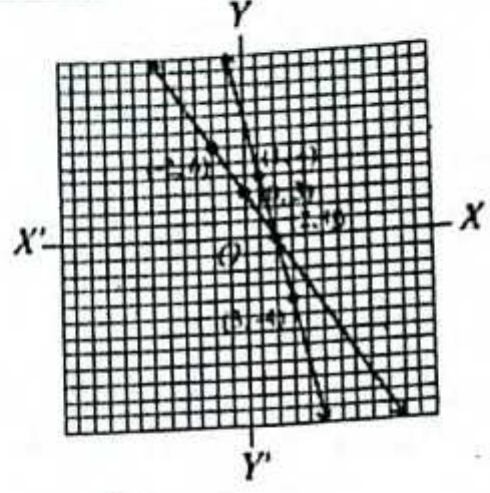
আবার, $\frac{y}{14} = \frac{1}{7}$, বা $y = \frac{14}{7} = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (3, 2) বিন্দুটি স্থাপন করি।

উদাহরণ-১০। লেখের সাহায্যে সমাধান কর : $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

ধরি, $y = 3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

$\therefore \quad y = 3 - \frac{3}{2}x$ ....(i)

এবং $y = 8 - 4x$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	−2	0	2
y	6	3	0

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু (−2,6), (0,3),(2,0)

আবার, সমীকরণ (ii) এ x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	1	2	3
y	4	0	−4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু (1,4), (2,0), (3,−4)

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।

এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (i) থেকে প্রাপ্ত (−2,6), (0,3), (2,0) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (ii) থেকে প্রাপ্ত (1,4), (2,0), (3,−4) বিন্দুগুলো স্থাপন করে এগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে দেখা যায়, ছেদবিন্দুটির স্থানাংক (2,0)।

$\therefore$ সমাধান $x = 2$, বা সমাধান : 2

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১২.৩

❑ লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

১। $3x + 4y = 14$
$4x - 3y = 2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x + 4y = 14$ .... (i)

$4x - 3y = 2$ ....(ii)

(i) নং হতে পাই,

$3x = 14 - 4y$

$\therefore x = \frac{14 - 4y}{3}$

এই সমীকরণটিতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	2	−2	6
y	2	5	−1

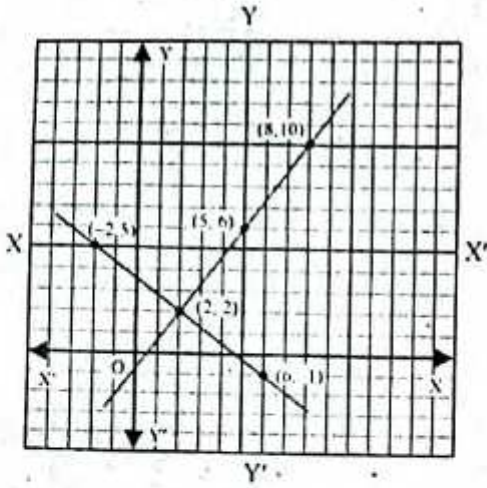
এবং (ii)নং হতে পাই,

$4x - 3y = 2$

বা, $4x = 2 + 3y$

$\therefore x = \frac{2 + 3y}{4}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	5	8
y	2	6	10

মনে করি, XOX' ও YOY' কে যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজে সমীকরণ (i)নং প্রাপ্ত (2, 2), (– 2, 5), (6, – 1) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (2, 2), (5, 6), (8, 10) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায় p বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,2)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2,2)$

২। $2x - y = 1$

$5x + y = 13$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x - y = 1$ .... (i)

$5x + y = 13$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই,

$2x = 1 + y$

বা, $x = \frac{y + 1}{2}$

এই সমীকরণ থেকে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	1	2	3
y	1	3	5

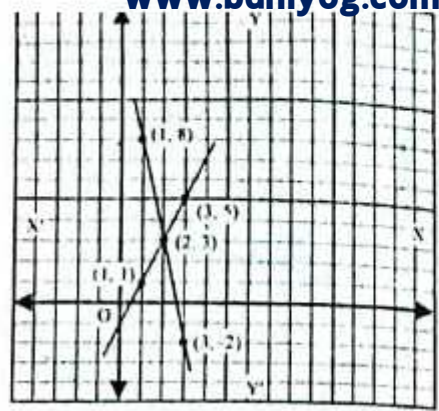
আবার (ii) নং হতে পাই,

$5x + y = 13$

বা, $5x = 13 - y$

$\therefore x = \frac{13 - y}{5}$

এই সমীকরণ থেকে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	3	1
y	3	–2	8

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত (1, 1), (2, 3), (3, 5) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্তি করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (2, 3), (3, – 2), (1, 8) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখার p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায় p বিন্দুর স্থানাংক (2, 3)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 3)$

৩। $2x + 5y = 1$

$x + 3y = 2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + 5y = 1$ ....(i)

$x + 3y = 2$ .... (ii)

(i)নং হতে পাই,

$2x = 1 - 5y$

$\therefore x = \frac{1 - 5y}{2}$

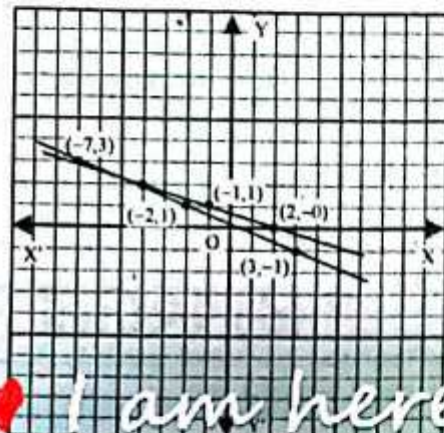
এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	–2	3	–7
y	1	–1	3

(ii)নং হতে পাই,

$x = 2 - 3y$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	–1	–7
y	0	1	3

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছ... বর্গের প্রতি বাহুর দৈ... একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i)নং হতে প্রাপ্ত (– 2,1), (3, – 1), (– 7, 3) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরল রেখা।

একইভাবে সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (2, 0), (– 1, 1), (– 4, 2) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখা পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 7, 3)

∴ নির্ণেয় সমাধান : (x, y) = (– 7, 3)

৪। $3x - 2y = 2$
$5x - 3y = 5$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x - 2y = 2$ ....(i)
$5x - 3y = 5$ ....(ii)

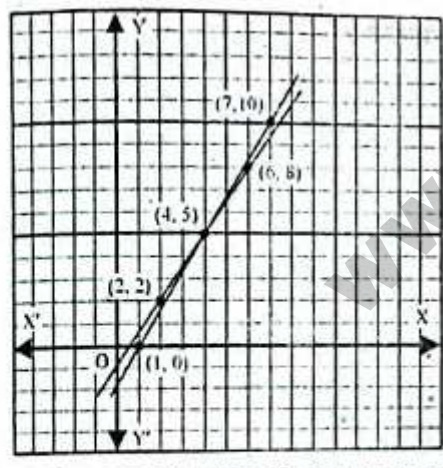
(i)নং হতে পাই,
$3x = 2 + 2y$
$\therefore x = \frac{2y+2}{3}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান বের করি। ও ছকে স্থাপন করি।

x	2	4	6
y	2	5	8

(ii)নং হতে পাই,
$5x = 5 + 3y$
$\therefore x = \frac{3y+5}{5}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান বের করি ও ছকে স্থাপন করি।

x	1	4	7
y	0	5	10

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এক ছক কাগজে সমীকরণ (i)নং হতে প্রাপ্ত (2, 2) (4, 5), (6, 8) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (1, 0), (4, 5) (7, 10) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরল রেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাংক (4, 5)

∴ নির্ণেয় সমাধান : (x, y) = (4, 5)

৫। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$
$2x + 3y = 13$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$ ....(i)
$2x + 3y = 13$.......(ii)

(i)নং হতে পাই

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$

বা, $\frac{3x+2y}{6} = 2$

বা, $3x + 2y = 12$

বা, $3x = 12 - 2y$

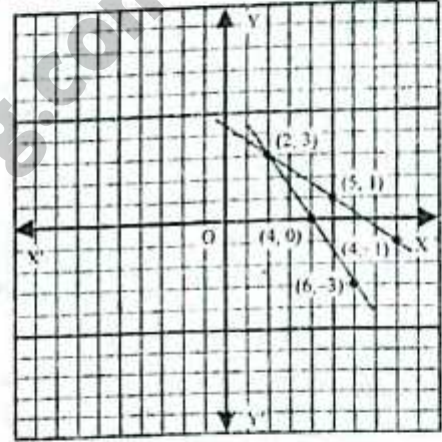
$\therefore x = \frac{12-2y}{3}$

এই সমীকরণ হতে, y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নিয়ে ছকে স্থাপন করি।

x	4	2	6
y	0	3	– 3

(ii)নং হতে পাই,
$2x = 13 - 3y$
$\therefore x = \frac{13-3y}{2}$

এই সমীকরণ হতে, y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নিয়ে ছকে স্থাপন করি।

x	5	2	8
y	1	3	– 1

মনে করি XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূল বিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত (4, 0), (2, 3) (6, – 3) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা একইভাবে। সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (5, 1), (2,3), (8, – 1) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাংক (2, 3)

∴ নির্ণেয় সমাধান : (x, y) = (2,3)

৬। $3x + y = 6$
$5x + 3y = 12$

সমাধান : দেয়া আছে, $3x + y = 6$ ....(i)
$5x + 3y = 12$ ....(ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y = 6 - 3x$

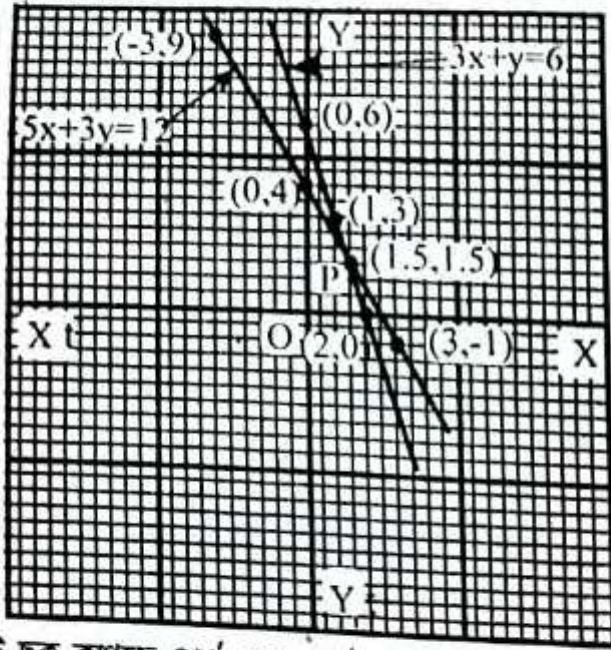
এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	0	1	2
y	6		

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $3y = 12 - 5x$

বা, $y = \frac{12-5x}{3}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	0	3	−3
y	4	−1	9

একটি ছক কাগজে OX′ এবং OY′ রেখা দুটি টানি। রেখা দুটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O হল মূল বিন্দু।

ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে প্রথম সমীকরণের লেখের (0, 6), (1, 3), (2, 0) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

আবার একই একক নিয়ে দ্বিতীয় সমীকরণের লেখের (0, 4), (3, − 1), (− 3, 9) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।

ছেদ বিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় : ধরি সরলরেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। লেখ থেকে দেখা যায়, P বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 1.5 এবং 1.5

অতএব, নির্ণেয় সমাধান (x, y) = (1·5, 1·5)

৭। $3x + 2y = 4$
$3x - 4y = 1$

সমাধান : দেয়া আছে, $3x - 4y = 1$ ----------(i)
$3x + 2y = 4$ ---------- (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $3x - 4y = 1$

বা, $-4y = 1 - 3x$

বা, $-y = \frac{1-3x}{4}$

$\therefore\ y = \frac{3x-1}{4}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	−1	3	−9
y	−1	2	−7

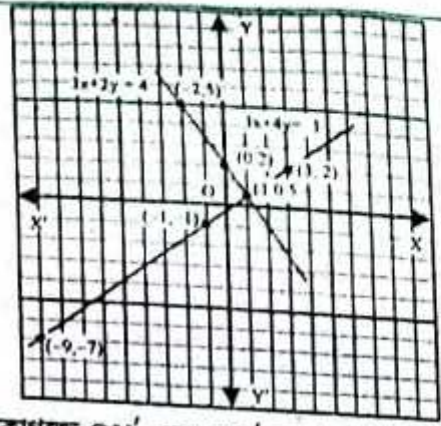
(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3x + 2y = 4$

বা, $2y = 4 - 3x$

$\therefore\ y = \frac{4-3x}{2}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	0	2	−2
y	2	−1	5

একটি ছক কাগজে OX′ এবং OY′ রেখা দুটি টানি। রেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ করে। O হল মূল বিন্দু।

ধরি, ছক কাগজের এক ঘর = 1 একক

প্রথম সমীকরণের লেখ অংকন ঃ প্রথম সমীকরণের লেখের (− 1, − 1), (3, 2), (− 9, − 7) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে উভয়দিকে বর্ধিত করি।

দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ অংকন : দ্বিতীয় সমীকরণের লেখের (0, 2), (2, − 1), (− 2, 5) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।

ছেদ বিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় : ধরি সরলরেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।

লেখ থেকে, P বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 1 এবং $\frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান ঃ $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

৮। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$

$x + \frac{y}{6} = 3$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$ .... (i)

$x + \frac{y}{6} = 3$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$

বা, $\frac{3x+2y}{6} = 3$

বা, $3x + 2y = 18$

বা, $3x = 18 - 2y$

$\therefore\ x = \frac{18-2y}{3}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নির্ণয় করে ছকে স্থাপন করি।

x	6	4	2
y	0	3	6

(ii) নং হতে পাই, $x + \frac{y}{6} = 3$

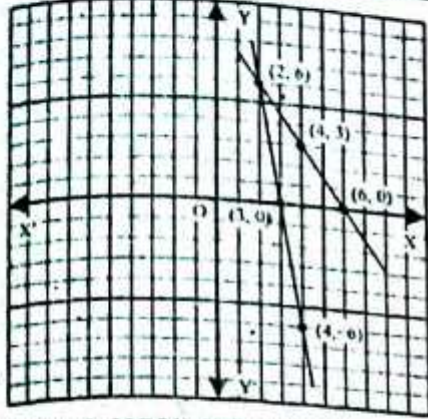
বা, $\frac{6x+y}{6} = 3$

বা, $6x + y = 18$

বা, $6x = 18 - y$

$\therefore\ x = \frac{18-y}{6}$

নং সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নির্ণয় করে ছকে স্থাপন করি।

x	3	2	4
y	0	6	−6

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত (6, 0), (4, 3), (2, 6) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত (3, 0), (2, 6), (4, − 6) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রে লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 6)

∴ সমাধান : (x, y) = (2, 6)

৯। $3x + 2 = x - 2$

সমাধান : $3x + 2 = x - 2$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

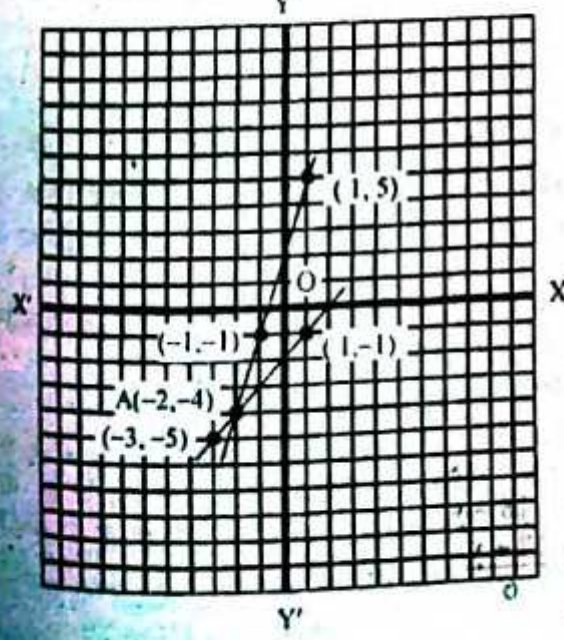
অতএব, $y = 3x + 2$ .... (i)

এবং $y = x - 2$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	−1	−2
y	5	−1	−4

আবার, (ii) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	−2	−3
y	−1	−4	−5

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1, 5); (−2, −4) ও (−1, − 1) এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (i) নং সমীকরণের লেখ।

আবার, (1, −1), (−2, −4) ও (−3, −5) এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলোর যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (ii) নং সমীকরণের লেখ।

এই সরলরেখা পূর্বোক্ত সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

লেখ থেকে দেখা যায় যে, A বিন্দুর ভুজ = −2

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = -2$

১০। $3x - 7 = 3 - 2x$

সমাধান : $3x - 7 = 3 - 2x$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

অতএব, $y = 3x - 7$ .... (i)

এবং $y = 3 - 7 = 3 - 2x$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

অতএব, $y = 3x - 7$ .... (i)

এবং $y = 3 - 2x$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	2	3
y	−4	−1	2

আবার, (ii) এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	3	2
y	1	−3	−1

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1,−4), (2,−1) ও (3, 2) এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখা কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (i) নং সমীকরণের লেখ।

আবার, (1, 1); (3, −3) ও (2, −1) এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলোর যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (ii) নং সমীকরণের লেখ। এই সরলরেখা পূর্বোক্ত সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। লেখ থেকে দেখা যায় যে, A বিন্দুর ভুজ = 2

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$

☐ অনুশীলনী- ১২.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ **কাজ :** ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x$ ডিগ্রি, $\angle C = x$ ডিগ্রি, $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২১২]

সমাধান : দেওয়া আছে,

ΔABC এর $\angle B = 2x$ ডিগ্রি,

$\angle C = x$ ডিগ্রি

$\angle A = y$ ডিগ্রি

এবং $\angle A = \angle B + \angle C$

বা, $y = 2x + x$

∴ $y = 3x$ .... (i)

∴ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $y + 2x + x = 180°$

বা, $y + 3x = 180°$

বা, $3x + 3x = 180°$ [(i) নং এর মান বসিয়ে]

বা, $6x = 180°$

∴ $x = 30°$

∴ $y = 3 \times 30°$
$= 90°$

∴ নির্ণেয় মান, $x = 30°$ এবং $y = 90°$।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ–১১। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 5 যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি থেকে 9 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y। অতএব, সংখ্যাটি $10x + y$,

∴ ১ম শর্তানুসারে $x + y + 5 = 3x$ .... (i)

এবং ২য় শর্তানসারে,

$10y + x = (10x + y) - 9$ .... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$y = 3x - x - 5$, বা, $y = 2x - 5$ .... (iii)

আবার, সমীকরণ (ii) থেকে পাই,

$10y - y + x - 10x + 9 = 0$

বা, $9y - 9x + 9 = 0$

বা, $y - x + 1 = 0$

বা, $2y - 5 - x + 1 = 0$ [(iii) থেকে y-এর মান বসিয়ে]

বা, $x = 4$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$10x + y = 10 \times 4 + 3$
$= 40 + 3$
$= 43$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 43

উদাহরণ–১২। আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?

সমাধান : মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও পুত্রের বয়স y বছর।

∴ ১ম শর্তানুসারে $x - 8 = 8(y - 8)$ .... (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $x + 10 = 2(y + 10)$ ... (ii)

$x - 8 = 8y - 64$

বা, $x = 8y - 64 + 8$

$x = 8y - 56$ ...... (iii)

আবার, $x + 10 = 2y + 20$

বা, $8y - 56 + 10 = 2y + 20$
[(iii) থেকে x এর মান বসিয়ে]

বা, $8y - 2y = 20 + 56 - 10$

বা, $6y = 66$

বা, $y = 11$

∴ (iii) থেকে পাই,

$x = 8 \times 11 - 56 = 88 - 56 = 32$

∴ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

উদাহরণ–১৩। একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100 মিটার।

ক) বাগানটির দৈর্ঘ্য x মি. ও প্রস্থ y মি. ধরে সমীকরণ জোট গঠন কর।

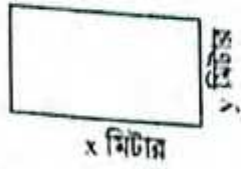
খ) বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ) বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রতিবর্গমিটারে 110.00 টাকা হিসেবে মোট কত খরচ হবে?

সমাধান :
আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

ক ১ম শর্তানুসারে $2y = x + 10$ .... (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x + y) = 100$ .... (ii)

x মিটার

খ সমীকরণ (i) থেকে পাই, $2y = x + 10$ ..... (i)
সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $2x + 2y = 100$ ...... (ii)
বা, $2x + x + 10 = 100$ [(i) থেকে 2y এর মান বসিয়ে]
বা, $3x = 90$
বা, $x = 30$
∴ (i) থেকে পাই, $2y = 30 + 10$ [x এর মান বসিয়ে]
বা, $2y = 40$
বা, $y = 20$
∴ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

গ রাস্তার বাইরের দৈর্ঘ্য (30 + 2 + 2) মি. = 34 মি.
এবং প্রস্থ = (20 + 2 + 2) মি. = 24 মি.

30 মিটার, 20 মিটার, 24 মিটার, 34 মিটার

∴ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল − বাগানের ক্ষেত্রফল
= (34 × 24 − 20) বর্গমিটার।
= (816 − 600) বর্গমিটার
= 216 বর্গমিটার।
∴ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি করার খরচ
= 216 × 110 = 23760 টাকা। (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১২.৪

১। নিচের কোন শর্তে $ax + by + c = 0$ ও $px + qy + r = 0$ সমীকরণ জোটটি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?
ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$
গ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$
উত্তর : ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$

২। $x + y = 4$, $x - y = 2$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?
ক) (2, 4)   খ) (4, 2)
গ) (3, 1)   ঘ) (1, 3)
উত্তর : গ) (3, 1)

৩। $x + y = 6$ ও $2x = 4$ হলে, y মান কত?
ক) 2   খ) 4
গ) 6   ঘ) 8
উত্তর : খ) 4

৪। নিচের কোনটির জন্য পাশের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	−4	0	4

ক) $y = x - 4$ খ) $y = 8 - x$
গ) $y = 4 - 2x$ ঘ) $y = 2x - 4$
উত্তর : ঘ) $y = 2x - 4$

৫। $2x - y = 8$ এবং $x - 2y = 4$ হলে, $x + y =$ কত?
ক) 0   খ) 4
গ) 8   ঘ) 12
উত্তর : খ) 4

৬। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :
i. $2x - y = 0$ ও $x - 2y = 0$ সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল
ii. $x - 2y + 3 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র (− 3, 0) বিন্দুগামী
iii. $3x + 4y = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র একটি সরলরেখা
উপরের তথ্যের ভিত্তিতে কোনটি সঠিক?
ক) i ও iii   খ) ii ও iii
গ) i ও iii   ঘ) i, ii ও iii
উত্তর : খ) ii ও iii

৭। আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার।
নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :
(১) ঘরটির দৈর্ঘ্য কত মিটার?
ক) 10   খ) 8
গ) 6   ঘ) 4
উত্তর : গ) 6
(২) ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?
ক) 24   খ) 32
গ) 48   ঘ) 80
উত্তর : ক) 24
(৩) ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা হিসেবে মোট কত খরচ হবে?
ক) 72000   খ) 43200
গ) 28800   ঘ) 21600
উত্তর : ঘ) 21600

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (৮ – ১৭)

৮। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি লব = x এবং হর = y
∴ ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y}$

১ম শর্তমতে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ....(i)

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ ....(ii)

(i)নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

বা, $5(x+1) = 4(y+1)$

বা, $5x + 5 = 4y + 4$

বা, $5x - 4y + 5 - 4 = 0$

বা, $5x - 4y + 1 = 0$ ....(iii)

আবার (ii)নং সমীকরণ থেকে পাই

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-5) = 1(y-5)$

বা, $2x - 10 = y - 5$

বা, $2x - y - 10 + 5 = 0$

বা, $2x - y - 5 = 0$ .... (iv)

এখন (iv)নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (iii)নং এর সাথে বিয়োগ করি,

$5x - 4y + 1 = 0$

$8x - 4y - 20 = 0$

(−) $-3x + 0 + 21 = 0$

বা, $-3x = -21$

বা, $x = \frac{-21}{-3}$

$\therefore x = 7$

x এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$5.7 - 4y + 1 = 0$

বা, $35 - 4y + 1 = 0$

বা, $-4y + 36 = 0$

বা, $-4y = -36$

বা, $y = \frac{-36}{-4}$

$\therefore y = 9$

অতএব নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$

৯। কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, লব = x এবং হর = y

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$ ---------(i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$ ---------(ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-1) = y + 2$

বা, $2x - 2 = y + 2$

বা, $2x - 2 - y - 2 = 0$

বা, $2x - y - 4 = 0$ -------------(iii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$

বা, $3(x-7) = y - 2$

বা, $3x - 21 = y - 2$

বা, $3x - 21 - y + 2 = 0$

বা, $3x - y - 19 = 0$ -------------(iv)

সমীকরণ (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

$2x - y - 4 = 0$

$3x - y - 19 = 0$

(−) করে, $-x + 15 = 0$

বা, $-x = -15$

$\therefore x = 15$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$2x - y - 4 = 0$

বা, $2 \times 15 - y - 4 = 0$

বা, $30 - y - 4 = 0$

বা, $-y + 26 = 0$

বা, $-y = -26$

$\therefore y = 26$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি, $\frac{x}{y} = \frac{15}{26}$

১০। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান : মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে, $y = 3x + 1$ .... (i)

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি $10y + x$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10y + x = 8(x + y)$ .... (ii)

এখন, (i) নং এর সাহায্যে (ii) নং থেকে পাই,

$10(3x + 1) + x = 8(x + 3x + 1)$

বা, $30x + 10 + x = 8(4x + 1)$

বা, $31x + 10 = 32x + 8$

বা, $31x - 32x = 8 - 10$

বা, $-x = -2$

$\therefore x = 2$

সুতরাং, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$y = 3x + 1 = 3.2 + 1 = 7$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x + y = 10.2 + 7 = 27$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 27.

১ম শর্তমতে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ....(i)

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ ....(ii)

(i)নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

বা, $5(x+1) = 4(y+1)$

বা, $5x + 5 = 4y + 4$

বা, $5x - 4y + 5 - 4 = 0$

বা, $5x - 4y + 1 = 0$ ....(iii)

আবার (ii)নং সমীকরণ থেকে পাই

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-5) = 1(y-5)$

বা, $2x - 10 = y - 5$

বা, $2x - y - 10 + 5 = 0$

বা, $2x - y - 5 = 0$ .... (iv)

এখন (iv)নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (iii)নং এর সাথে বিয়োগ করি,

$5x - 4y + 1 = 0$
$8x - 4y - 20 = 0$

(–) $-3x + 0 + 21 = 0$

বা, $-3x = -21$

বা, $x = \frac{-21}{-3}$

$\therefore x = 7$

x এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$5.7 - 4y + 1 = 0$

বা, $35 - 4y + 1 = 0$

বা, $-4y + 36 = 0$

বা, $-4y = -36$

বা, $y = \frac{-36}{-4}$

$\therefore y = 9$

অতএব নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$

৯। কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, লব = x এবং হর = y

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$ ---------(i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$ ---------(ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-1) = y + 2$

বা, $2x - 2 = y + 2$

বা, $2x - 2 - y - 2 = 0$

বা, $2x - y - 4 = 0$ ------------(iii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$

বা, $3(x-7) = y - 2$

বা, $3x - 21 = y - 2$

বা, $3x - 21 - y + 2 = 0$

বা, $3x - y - 19 = 0$ ------------(iv)

সমীকরণ (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

$2x - y - 4 = 0$
$3x - y - 19 = 0$

(–) করে, $-x + 15 = 0$

বা, $-x = -15$

$\therefore x = 15$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$2x - y - 4 = 0$

বা, $2 \times 15 - y - 4 = 0$

বা, $30 - y - 4 = 0$

বা, $-y + 26 = 0$

বা, $-y = -26$

$\therefore y = 26$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি, $\frac{x}{y} = \frac{15}{26}$

১০।দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে, $y = 3x + 1$ .... (i)

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি $10y + x$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10y + x = 8(x + y)$ .... (ii)

এখন, (i) নং এর সাহায্যে (ii) নং থেকে পাই,

$10(3x + 1) + x = 8(x + 3x + 1)$

বা, $30x + 10 + x = 8(4x + 1)$

বা, $31x + 10 = 32x + 8$

বা, $31x - 32x = 8 - 10$

বা, $-x = -2$

$\therefore x = 2$

সুতরাং, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$y = 3x + 1 = 3.2 + 1 = 7$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x + y = 10.2 + 7 = 27$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 27.

১। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, এককের অংক $= x$

$\therefore$ দশকের অংক $= x + 4$

তাহলে, সংখ্যাটি দাঁড়ায়,

$= 10 \times (x + 4) + x$

$= 10x + 40 + x = 11x + 40$

আবার, অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করলে দাঁড়ায়

$= 10 \times x + x + 4$

$= 10x + x + 4 = 11x + 4$

প্রশ্নানুসারে, $11x + 40 + 11x + 4 = 110$

বা, $22x + 44 = 110$

বা, $22x = 110 - 44$

বা, $22x = 66$

বা, $x = \frac{66}{22}$

$\therefore$ $x = 3$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 11x + 40 = 11.3 + 40$

$= 33 + 40 = 73$

আবার, স্থান পরিবর্তনকারী সংখ্যাটি $= 11x + 4$

$= 11.3 + 4 = 33 + 4 = 37$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 73$ অথবা, 37

২। মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, বর্তমানে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি = x বছর

$\therefore$ বর্তমানে মাতার বয়স $= 4x$ বছর

আবার 5 বছর পরে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি $= (x + 5 \times 2)$ বছর

এবং 5 বছর পরে মাতার বয়স $= (4x + 5)$ বছর হবে।

প্রশ্নমতে, $4x + 5 = (x + 10).2$

বা, $4x + 5 = 2x + 20$

বা, $4x - 2x = 20 - 5$

বা, $2x = 15$

বা, $x = \frac{15}{2}$

বা, $x = \frac{15}{2}$ বছর

$\therefore$ মাতার বর্তমান বয়স $= \left(4 \times \frac{15}{2}\right)$ বছর

$= 30$ বছর

অতএব, মাতার বর্তমান বয়স 30 বছর।

১৩। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আর দৈর্ঘ্য 3 মিটার ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য y মিটার এবং প্রস্থ x মিটার

তাহলে ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গ মিটার

এখন, দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম এবং প্রস্থ 3 মিটার অধিক হলে

ক্ষেত্রফল $= (y - 5)(x + 3)$ বর্গ মিটার

$= (xy - 5x + 3y - 15)$ বর্গ মি.

১ম শর্তানুসারে,

$xy - (xy - 5x + 3y - 15) = 9$

বা, $xy - xy + 5x - 3y + 15 = 9$

বা, $5x - 3y = 9 - 15$

$\therefore$ $5x - 3y = -6$ ....(i)

আবার, দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল $= (y + 3)(x + 2)$ বর্গ. মি.

$= (xy + 3x + 2y + 6)$ বর্গ. মি.

২য় শর্তানুসারে,

$xy + 3x + 2y + 6 - 67 = xy$

বা, $xy - xy + 3x + 2y - 61 = 0$

বা, $3x + 2y = 61$ ....(ii)

(i) সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$10x - 6y = -12$ ....(iii)

(ii) কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x + 6y = 183$ ....(iv)

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$10x - 6y = -12$

$9x + 6y = 183$

(+) করে $19x = 171$

বা, $x = \frac{171}{19}$

$\therefore$ $x = 9$

এখন, x-এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 61$

বা, $3 \times 9 + 2y = 61$

বা, $27 + 2y = 61$

বা, $2y = 61 - 27$

বা, $2y = 34$

বা, $y = \frac{34}{2}$

$\therefore$ $y = 17$

অতএব, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 17 মিটার এবং প্রস্থ 9 মিটার

১৪। একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি.মি। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
এবং স্রোতের বেগ " y কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$ .... (i)
দ্বিতীয় " $x - y = 5$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই

$x + y = 15$
$x - y = 5$

(+) $2x = 20$

বা, $x = \frac{20}{2}$

$\therefore$ $x = 10$

এখন x এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$10 + y = 15$
বা, $y = 15 - 10$
$\therefore y = 5$

অতএব নৌকার বেগ ঘণ্টায় 10 কি.মি
এবং স্রোতের " " 5 কি.মি (Ans.)

১৫। একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতন বৃদ্ধি পান তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পর 5000 টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, গার্মেন্টস শ্রমিকের মাসিক বেতন x টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

$\therefore$ 4 বছর পর ঐ শ্রমিকের বেতন হবে $(x + 4y)$ টাকা
8 " " " " " " $(x + 8y)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x + 4y = 4500$ .... (i)
$x + 8y = 5000$ .... (ii)

এখন (i)নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii)নং এর সাথে বিয়োগ করে পাই

$2x + 8y = 9000$
$x + 8y = 5000$

(–) $x + 0 = 4000$

$\therefore x = 4000$ টাকা

x এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$4000 + 4y = 4500$
বা, $4y = 4500 - 4000$
বা, $4y = 500$
বা, $y = \frac{500}{4}$
$\therefore$ $y = 125$ টাকা

অতএব, মাসিক বেতন 4000 টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি 125 টাকা। (Ans.)

১৬। একটি সরল সমীকরণজোট
$x + y = 10$
$3x - 2y = 0$

ক) দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর কয়টি সমাধান আছে? ২
খ) সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ৪
গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

সমাধান:

ক) $x + y = 10$ .... (i)
$3x - 2y = 0$ .... (ii)

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{1}{3}$

y " " " $= -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$

সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর সমাধান আছে মাত্র একটি।

খ) সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$x = 10 - y$ .... (iii)
x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
$3(10 - y) - 2y = 0$
বা, $30 - 3y - 2y = 0$
বা, $-5y = -30$
$\therefore y = 6$
y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই
$x = 10 - 6$
$\therefore x = 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান (4, 6)

গ) $x + y = 10$ .... (i)
$3x - 2y = 0$ .... (ii)
সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y = 10 - x$
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	10	5
y	10	0	5

সমীকরণটির লেখের তিনটি বিন্দু হলো (0, 10), (10, 0), (5, 5)।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,
$-2y = -3x$
বা, $y = \frac{3x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	4	–2
y	0	6	–3

সমীকরণটির রেখের তিনটি বিন্দু হলো
(0, 0), (4, 6) এবং (–2, –3).

১৪। একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি.মি। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
এবং স্রোতের বেগ " y কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$ .... (i)
দ্বিতীয় " $x - y = 5$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই

$$\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 5 \\ \hline (+)\ 2x = 20 \end{array}$$

বা, $x = \frac{20}{2}$

$\therefore x = 10$

এখন x এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$10 + y = 15$
বা, $y = 15 - 10$
$\therefore y = 5$

অতএব নৌকার বেগ ঘণ্টায় 10 কি.মি
এবং স্রোতের " " 5 কি.মি (Ans.)

৫। একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতন বৃদ্ধি পান তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পর 5000 টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, গার্মেন্টস শ্রমিকের মাসিক বেতন x টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

$\therefore$ 4 বছর পর ঐ শ্রমিকের বেতন হবে $(x + 4y)$ টাকা
8 " " " " " $(x + 8y)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x + 4y = 4500$ .... (i)
$x + 8y = 5000$ .... (ii)

এখন (i)নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii)নং এর সাথে বিয়োগ করে পাই

$$\begin{array}{l} 2x + 8y = 9000 \\ x + 8y = 5000 \\ \hline (-)\ x + 0 = 4000 \end{array}$$

$\therefore x = 4000$ টাকা

x এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$4000 + 4y = 4500$
বা, $4y = 4500 - 4000$
বা, $4y = 500$
বা, $y = \frac{500}{4}$
$\therefore y = 125$ টাকা

অতএব, মাসিক বেতন 4000 টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি 125 টাকা। (Ans.)

১৬। একটি সরল সমীকরণজোটি
$x + y = 10$
$3x - 2y = 0$

ক) দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর কয়টি সমাধান আছে?
খ) সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।
গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $x + y = 10$ .... (i)
$3x - 2y = 0$ .... (ii)

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{1}{3}$

y " " " $= -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$

সমীকরণজোটটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর সমাধান আছে মাত্র একটি।

খ) সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$x = 10 - y$ .... (iii)
x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
$3(10 - y) - 2y = 0$
বা, $30 - 3y - 2y = 0$
বা, $-5y = -30$
$\therefore y = 6$
y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই
$x = 10 - 6$
$\therefore x = 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান (4, 6)

গ) $x + y = 10$ .... (i)
$3x - 2y = 0$ .... (ii)
সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y = 10 - x$
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	10	5
y	10	0	5

সমীকরণটির লেখের তিনটি বিন্দু হলো (0, 10), (10, 0), (5, 5)।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,
$-2y = -3x$
বা, $y = \frac{3x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	4	−2
y	0	6	−3

সমীকরণটির রেখের তিনটি বিন্দু হলো
(0, 0), (4, 6) এবং (−2, −3).

ছক কাগজের XOX' ও YOY' বরাবর যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত লেখের বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে পরপর যোগ করি। ফলে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল।

আবার, একই অক্ষযুগল ও একক ধরে iiনং সমীকরণ হতে প্রাপ্ত লেখে বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করি। এটিও একটি সরলরেখা।

সরল রেখা দুটি পরস্পরকে P(4,6) বিন্দুতে ছেদ করেছে। মনে করি, $x + y = 10$ ও $3x - 2y = 0$ সমীকরণ দুটির লেখ x অক্ষকে যথাক্রমে R(10, 0) ও 0(0, 0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন ΔOPR-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। ছক কাগজ হতে দেখা যায়, উক্ত ΔOPR–এর ভূমি 10 একক এবং উচ্চতা 6 একক।

∴ Δক্ষেত্র OPR ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30$ বর্গ একক

১৭। কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 2 হয়। আবার হর হতে, 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 1 হয়।

ক) ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণ জোট গঠন কর।

খ) সমীকরণ জোটটি আড়গুনন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?

গ) সমীকরণ জোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান :

ক) যেহেতু ভগ্নাংশটি ধরা হয়েছে $\frac{x}{y}$

১ম শর্তমতে, $\frac{x+7}{y} = 2$

বা, $x + 7 = 2y$

বা, $x - 2y + 7 = 0$

২য় শর্তমতে, $\frac{x}{y-2} = 1$

বা, $x = y - 2$

বা, $x - y + 2 = 0$

সুতরাং $x - 2y + 7 = 0$ এবং $x - y + 2 = 0$ সমীকরণ দুইটি সমীকরণজোট।

খ) "ক" থেকে সমীকরণ জোট দুইটি হলো

$x - 2y + 7 = 0$ .... (i)

$x - y + 2 = 0$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) নং থেকে আড়গুণন করে পাই

$$\frac{x}{(-2)\times 2-(-1)\times 7} = \frac{y}{7\times 1-1\times 2} = \frac{1}{1\times(-1)-1\times(-2)}$$

বা, $\frac{x}{-4+7} = \frac{y}{7-2} = \frac{1}{-1+2}$

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{1}{1}$

এখন, $\frac{x}{3} = 1$ এবং $\frac{y}{5} = 1$

$\therefore x = 3 \quad \therefore y = 5$

∴ নির্ণেয় সমাধান (x, y) = (3, 5)

অতএব ভগ্নাংশটি হলো $= \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

গ) সমীকরণজোট দুইটি হলো

$x - 2y + 7 = 0$ .... (i)

$x - y + 2 = 0$ .... (ii)

(i) নং থেকে পাই, $x = 2y - 7$

এই সমীকরণের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি

x	–5	–3	–1
y	1	2	3

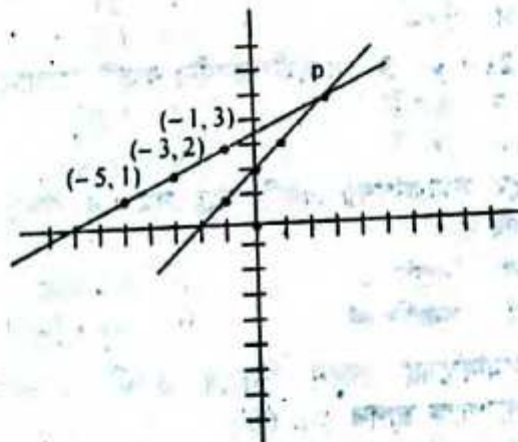
আবার (ii)নং থেকে পাই,

$x = y - 2$

অতএব এই সমীকরণের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	–1	0	1
y	1	2	3

একটি ছক কাগজে Ox' ও Oy' রেখা দুইটি টানি। রেখা দুটি o বিন্দুতে ছেদ করে। O হলো মূল বিন্দু। ধরি, ছক কাগজের এক ঘর = 1 একক প্রথমে (i)নং সমীকরণের লেখের (– 5, 1), (– 3, 2) , (– 1, 3) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। দেখা যায় তারা একটি সরলরেখা উৎপন্ন করেছে। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি।

আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্রদত্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। এখন বিন্দুগুলো যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এখন সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।

ধরি, সরলরেখা দুটি পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করে। লেখ থেকে p বিন্দুর ভুজও কোটি যথাক্রমে (3 ও 5)

অতএব, নির্ণেয় সমাধান (x, y) = (3, 5) (সত্যতা যাচাই হলো) **(Ans.)**

অসীম ধারা

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

অনুক্রম (Sequence) : যদি কতগুলো সংখ্যা বা রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় .... এভাবে পর পর সাজানো যায়, তবে এটিকে অনুক্রম বলে। যেমন :

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
b) 1, 3, 9, 27, ...
c) 1, 2, 4, 7, 11, ...
d) 3, 2, 1, 0, – 1, – 2, – 3, ...

ধারা (Series) : যদি অনুক্রমের পদগুলোকে পর পর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হয়, তবে তাকে ধারা বলে। যেমন:

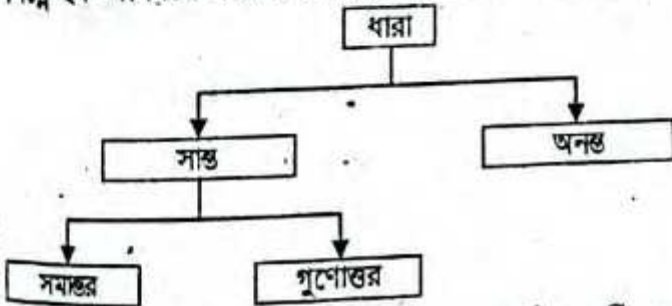
a) $1 + 2 + 3 + 4 +$ ....
b) $1 + 3 + 9 + 27 +$ ....
c) $1 + 2 + 4 + 5 + 8 +$ ....
d) $3 + 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) +$ ....

ধারার প্রকারভেদ : ধারা প্রধানত দুই প্রকার। যেমন–

ক) সান্ত বা সসীম ধারা এবং
খ) অনন্ত বা অসীম ধারা।

সান্ত ধারাকে আবার দুইভাগে ভাগ করা যায়। যেমন –

i) সমান্তর ধারা।
ii) গুণোত্তর ধারা।

নিম্নে ছক আকারে ধারার প্রকারভেদ দেখানো হলো :

সমান্তর ধারা : যে ধারায় কোনো পদকে তার পরবর্তী পদ থেকে বিয়োগ করলে একই সংখ্যা বা রাশি পাওয়া যায়, তাকে সমান্তর ধারা বলে এবং এই বিয়োগফলকে ধারার সাধারণ অন্তর বলে। যেমন–

$2 + 4 + 6 + 8 + 10$ .... ধারাটি একটি সমান্তর ধারা। কারণ পরপর দুটি পদের অন্তর সমান।

∴ সাধারণ অন্তর

= ২য় পদ – ১ম পদ = ৩য় পদ – ২য় পদ = ৪র্থ পদ – ৩য় পদ ......

$= 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 =$ ......

$= 2 = 2 = 2 =$ ....

গুণোত্তর ধারা : যে ধারার কোন পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন–

$3 + 6 + 12 + 24 +$ .... ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। কারণ পরপর দুটি পদের অণুপাত সমান।

∴ সাধারণ অণুপাত = $\frac{\text{২য় পদ}}{\text{১ম পদ}} = \frac{\text{৩য় পদ}}{\text{২য় পদ}} = \frac{\text{৫ম পদ}}{\text{৪র্থ পদ}}$

$= \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} =$ ....

$= 2 = 2 = 2$ ....

অসীম ধারা : যে ধারার পদসংখ্যা অসীম, তাকে অসীম ধারা বলে। যেমন :

$1 + 2 + 3 +$ .... ∞

প্রয়োজনীয় সূত্র :

সমান্তর ধারার সূত্র :

1. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,
   প্রথম হতে n-তম পদ বা শেষ পদ, $p = a + (n - 1) d$
2. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,
   প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1) d\}$

গুণোত্তর ধারার সূত্র :

1. কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে,
   প্রথম হতে n-তম পদ $= aq^{n-1}$
2. কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে,

প্রথম n পদের সমষ্টি

(i) $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ [যখন q > 1]

(ii) $S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ [যখন q < 1]

☐ আরও কিছু গুরুত্বপূর্ণ সূত্র :

i. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ, $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি অর্থাৎ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি অর্থাৎ, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

iv. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + n = n^2$

v. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + n = n(n+1)$

☐ অনুশীলনী- ১৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

☐ কাজ : পৃষ্ঠা : ২১৬

১। নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলি লেখ :

i) $\frac{1}{n}$ ii) $\frac{n-1}{n+1}$

iii) $\frac{1}{2^n}$ iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

v) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ vi) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

সমাধান :

i) $\frac{1}{n}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{1} = 1$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$

ii) $\frac{n-1}{n+1}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{2} = 0$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$

iii) $\frac{1}{2^n}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \ldots\ldots$

iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

v) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{1+1}\frac{1}{1+1}$

$= (-1)^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2+1}\frac{2}{2+1}$

$= (-1)^3\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3+1}\frac{3}{3+1}$

$= (-1)^4\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots$

(গ) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{1-1}\frac{1}{2.1+1}$

$= (-1)^0\frac{1}{3} = 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2-1}\frac{2}{2.2+1}$

$= (-1)^1\frac{2}{5} = (-1).\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3+1}\frac{3}{2.3+1}$

$= \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$, ...

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

সমাধান :

$(-1)^2\frac{n+1}{4n-2}$

n = 1 হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{2.1}\frac{1+1}{4.1-2} = 1.\frac{2}{2} = 1$

n = 2 " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2-2}\frac{2+1}{4.2-2} = 1.\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

n = 3 " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3.1}\frac{3+1}{4.3-2} = 1.\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$, ...

☐ কাজ : পৃষ্ঠ : ২১৭

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, ২২তম পদ, rতম এবং (2p + 1) তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : কোনো সমান্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n হলে,

ধারাটির n তম পদ = a + (n − 1)d

দেওয়া আছে,

প্রথম পদ, a = 7

সাধারণ অন্তর, d = 7

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ = a + (2 − 1) d = 5 + 1.7 = 12

ধারাটির তৃতীয় পদ = a + (3 − 1) d = 5 + 2.7 = 19

ধারাটির চতুর্থ পদ = a + (4 − 1) d = 5 + 3.7 = 26

ধারাটির পঞ্চম পদ = a + (5 − 1) d = 5 + 4.7 = 33

ধারাটির ষষ্ঠ পদ = a + (6 − 1) d = 5 + 5.57 = 40

ধারাটির 22 তম পদ = a + (22 − 1) d = 5 + 21.7 = 152

ধারাটির r তম পদ = a + (r − 1) d = 5 + (r − 1) 7

= 5 + 7r − 7

= 7r − 2

ধারাটির (2p + 1) তম পদ = a + (2p + 1 − 1) d

= 5 + 2p.7

= 5 + 14p

= 14p + 5

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১। 5 + 8 + 11 + 14 + ... ধারাটির কোন পদ 383?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ a = 5, সাধারণ অন্তর d = 8 − 5 = 11 − 8 = 3

∴ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ = a + (n − 1) d

∴ a + (n − 1) d = 383

বা, 5 + (n − 1)3 = 383

বা, 5 + 3n − 3 = 383

বা, 3n = 383 − 5 + 3

বা, 3n = 381

বা, $n = \frac{381}{3}$ ∴ n = 127

∴ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383. (Ans.)

উদাহরণ-২। প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$

∴ প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275 (Ans.)

উদাহরণ-৩। 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 = কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ a = 1, সাধারণ অন্তর d = 2 − 1 = 1 এবং শেষ পদ p = 99

∴ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n − 1)d

∴ a + (n − 1)d = 99

বা, 1 + (n − 1) 1 = 99

বা, 1 + n − = 99

∴ n = 99

বিকল্প পদ্ধতি :

যেহেতু $S_n = \frac{n}{2}(a + p)$

$\therefore S_{99} = \frac{99}{2}(1 + 99)$

$= \frac{99 \times 100}{2} = 4950$ (100 কেটে 50)

(iv) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n−সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং, ধারাটির 99টি পদের সমষ্টি S_{99}

$= \frac{99}{2}\{2 \times 1 + (99 - 1) 1\} = \frac{99}{2}(2 + 98)$

$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$ **(Ans.)**

উদাহরণ-৪। 7 + 12 + 17 + ... ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1) d\}$

তাহলে, 30টি পদের সমষ্টি S_{30}

$= \frac{30}{2}\{2.7 + (30 - 1) 5\} = 15 (14 + 29 \times 5)$

$= 15 (14 + 145) = 15 \times 159$

$= 2385$ **(Ans.)**

উদাহরণ-৫। ক তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

i. তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

ii. উপরোক্ত সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

iv. এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান :

i. প্রথম মাসে সঞ্চয় করেন 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসে সঞ্চয় করেন (1200 + 100) টাকা = 1300 টাকা

তৃতীয় মাসে সঞ্চয় করেন (1300 + 100) টাকা = 1400 টাকা

চতুর্থ মাসে সঞ্চয় করেন (1400 + 100) টাকা = 1500 টাকা

সুতরাং, এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1200$

সাধারণ অন্তর $d = 1300 - 1200 = 100$

ধারাটির n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$= 1200 + (n - 1) 100$

$= 1200 + 100n - 100$

$= 100n + 1100$

অতএব, তিনি nতম মাসে সঞ্চয় করেন (100n + 1100) টাকা।

ii. এক্ষেত্রে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারাটি হবে 1200 + 1300 + 1400 + ... + (100n + 1100)

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে সঞ্চয় করেন

$= \frac{n}{2}\{2a + (n - 1) d\}$ টাকা

$= \frac{n}{2}\{2 \times 1200 + (n - 1) 100\}$ টাকা

$= \frac{n}{2}(2400 + 100n - 100)$ টাকা

$= \frac{n}{2}(2300 + 100n)$ টাকা

$= \frac{n}{2} \times 2 (1150 + 50n)$ টাকা

$= n (50n + 1150)$ টাকা।

iv. আমরা জানি, এক বছর = 12 মাস। এক্ষেত্রে, $n = 12$.

অতএব, [উপরের (iii) হতে] ক এক বছরে সঞ্চয় করেন 12 (50 × 12 + 1150) টাকা

= 12 (600 + 1150) টাকা = 12 × 1750 টাকা

= 21000 টাকা। **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৩.১

১। 2 − 5 − 12 − 19 − .... ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, এর প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর d = দ্বিতীয় পদ − প্রথম পদ

$= (-5) - (2)$

$= -5 - 2$

$= -7$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার, n তমপদ $= a + (n - 1) d$

∴ ধারাটির 12 তম পদ $= a + (12 - 1)d$

$= 2 + (11)(-7)$

$= 2 - 77$

$= -75$

অতএব, ধারাটির সাধারণ অন্তর −7 এবং 12 তম পদ −75. **(Ans.)**

২। 8 + 11 + 14 + 17 + ... ধারাটির কোন পদ 392?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 11 - 8 = 3$

মনে করি, r তম পদ = 392

∴ $a + (r - 1)d = 392$

বা, $8 + (r - 1)3 = 392$

বা, $8 + 3r - 3 = 392$

বা, $5 + 3r = 392$

বা, $3r = 387$

বা, $r = \frac{387}{3}$

∴ $r = 129$

অতএব ধারাটির 129 তম পদ 392. **(Ans.)**

৩। 4 + 7 + 10 + 13 + ... ধারাটির কোন পদ 301?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 4$

সাধারণ অন্তর $d = 7 - 4 = 3$

মনে করি, r তম পদ = 301

∴ $a + (r - 1)3 = 301$

বা, $4 + 3r - 3 = 301$

বা, $3r + 1 = 301$

$= \frac{99}{2}\{2 \times 1 + (99 - 1)1\} = \frac{99}{2}(2 + 98)$

$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$ (Ans.)

উদাহরণ–৪। $7 + 12 + 17 + \ldots\ldots$ ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n–সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

তাহলে, 30টি পদের সমষ্টি S_{30}

$= \frac{30}{2}\{2.7 + (30-1)5\} = 15(14 + 29 \times 5)$

$= 15(14 + 145) = 15 \times 159$

$= 2385$ (Ans.)

উদাহরণ–৫। ক তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

i. তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

ii. উপরোক্ত সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

iv. এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান:

i. প্রথম মাসে সঞ্চয় করেন 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসে সঞ্চয় করেন (1200 + 100) টাকা = 1300 টাকা

তৃতীয় মাসে সঞ্চয় করেন (1300 + 100) টাকা = 1400 টাকা

চতুর্থ মাসে সঞ্চয় করেন (1400 + 100) টাকা = 1500 টাকা

সুতরাং, এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1200$

সাধারণ অন্তর $d = 1300 - 1200 = 100$

ধারাটির n তম পদ $= a + (n-1)d$

$= 1200 + (n-1)100$

$= 1200 + 100n - 100$

$= 100n + 1100$

অতএব, তিনি nতম মাসে সঞ্চয় করেন $(100n + 1100)$ টাকা।

ii. এক্ষেত্রে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারাটি হবে $1200 + 1300 + 1400 + \ldots\ldots + (100n + 1100)$

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে সঞ্চয় করেন

$= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ টাকা

$= \frac{n}{2}\{2 \times 1200 + (n-1)100\}$ টাকা

$= \frac{n}{2}(2400 + 100n - 100)$ টাকা

$= \frac{n}{2}(2300 + 100n)$ টাকা

$= \frac{n}{2} \times 2(1150 + 50n)$ টাকা

$= n(50n + 1150)$ টাকা।

iv. আমরা জানি, এক বছর = 12 মাস। এক্ষেত্রে, $n = 12$.

অতএব, [উপরের (iii) হতে] ক এক বছরে সঞ্চয় করেন $12(50 \times 12 + 1150)$ টাকা

$= 12(600 + 1150)$ টাকা $= 12 \times 1750$ টাকা

$= 21000$ টাকা। (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৩.১

১। $2 - 5 - 12 - 19 - \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, এর প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর d = দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ

$= (-5) - (2)$

$= -5 - 2$

$= -7$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার, n তমপদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= a + (12-1)d$

$= 2 + (11)(-7)$

$= 2 - 77$

$= -75$

অতএব, ধারাটির সাধারণ অন্তর -7 এবং 12 তম পদ -75. (Ans.)

২। $8 + 11 + 14 + 17 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ 392?

সমাধান: ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 11 - 8 = 3$

মনে করি, r তম পদ = 392

$\therefore\ a + (r-1)d = 392$

বা, $8 + (r-1)3 = 392$

বা, $8 + 3r - 3 = 392$

বা, $5 + 3r = 392$

বা, $3r = 387$

বা, $r = \frac{387}{3}$

$\therefore\ r = 129$

অতএব ধারাটির 129 তম পদ 392. (Ans.)

৩। $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ 301?

সমাধান: ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 4$

সাধারণ অন্তর $d = 7 - 4 = 3$

মনে করি, r তম পদ = 301

$\therefore\ a + (r-1)3 = 301$

বা, $4 + 3r - 3 = 301$

বা, $3r + 1 = 301$

বা, $3r = 300$

বা, $r = \frac{300}{3}$

$\therefore r = 100$

অতএব প্রদত্ত ধারাটির 100 তম পদ 301 (Ans.)

৪। কোনো সমান্তর ধারার p তম পদ p^2 এবং q তম পদ q^2 হলে, ধারাটির $(p + q)$ তম পদ কত?

সমাধান: মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d

$\therefore$ p তম পদ $= a + (p - 1) d = a + pd - d$

$\therefore$ q " " $= a + (q - 1) d = a + qd - d$

প্রশ্নমতে, $a + pd - d = p^2$ ....(i)

এবং $a + qd - d = q^2$ ....(ii)

(–) $pd - qd = p^2 - q^2$

বা, $d(p - q) = (p + q)(p - q)$

$\therefore d = p + q$

d এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a + p(p + q) - (p + q) = p^2$

বা, $a + p^2 + pq - p - q - p^2 = 0$

$\therefore a = p + q - pq$

এখন, $(p + q)$ তম পদ $= a + (p + q - 1)d$

$= p + q - pq + (p + q - 1)(p + q)$ [মান বসিয়ে]

$= p + q - pq + p^2 + pq - p + pq + q^2 - q$

$= p^2 + pq + q^2$

অতএব ধারাটির $(p + q)$ তম পদ $= (p^2 + pq + q^2)$ (Ans.)

৫। কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, $(m + n)$ তম পদ কত?

সমাধান: মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d

$\therefore$ m তম পদ $= a + (m - 1)d = a + md - d$

$\therefore$ n " " $= a + (n - 1)d = a + nd - d$

প্রশ্নানুসারে, $a + md - d = n$ .... (i)

এবং $a + nd - d = m$ .... (ii)

(–) $md - nd = n - m$

বা, $d(m - n) = n - m$

বা, $d(m - n) = -(m - n)$

$\therefore d = -1$

d এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a + m(-1) - (-1) = n$

বা, $a - m + 1 = n$

বা, $a = n + m - 1$

এখন, $(m + n)$ তম পদ $= a + (m + n - 1) d$

$= m + n - 1 + (m + n - 1)(-1)$

$= m + n - 1 - m - n + 1$

$= 0$

অতএব ধারাটির $(m + n)$ তম পদ 0 (Ans.)

৬। $1 + 3 + 5 + 7 + ...$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ, a = 1

সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

পদসংখ্যা $= n$

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2\}$

$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2)$

$= \frac{n}{2} \cdot 2n$

$= n^2$

অতএব, প্রদত্ত ধারাটির n পদের নির্ণেয় সমষ্টি n^2. (Ans.)

৭। $8 + 16 + 24 + ...$ ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

এখানে,

সমান্তর ধারার ১ম পদ, $a = 8$

সাধারণ অন্তর $d = 16 - 8 = 8$

পদ সংখ্যা $n = 9$

n পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1) d\}$

$\therefore$ 9 পদের সমষ্টি $S_9 = \frac{9}{2}\{2.8 + (9 - 1) 8\}$

$= \frac{9}{2}\{16 + 64\}$

$= \frac{9}{2} \times 80$

$= 9 \times 40$

$= 360$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 9টি পদের সমষ্টি 360। (Ans.)

৮। $5 + 11 + 17 + 23 + ... + 59 =$ কত?

সমাধান: এটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 5 = 6$

মনে করি,

n তম পদ = 59

$\therefore a + (n - 1) d = 59$

বা, $5 + (n - 1) 6 = 59$ [মান বসিয়ে]

বা, $(n - 1) 6 = 59 - 5$

বা, $(n - 1) 6 = 54$

বা, $n - 1 = 9$

বা, $n = 9 + 1$

$\therefore n = 10$

$\therefore$ ধারাটির পদ সংখ্যা = 10

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1) d\}$

$= \frac{10}{2}\{2 \cdot 5 + (10 - 1) \cdot 6\}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{10}{2}\{10 + 9 \cdot 6\}$

$= 5(10 + 54)$

$= 5 \times 64$

$= 320$

অতএব, প্রদত্ত ধারাটির সমষ্টি = 320 (Ans.)

৯। $29 + 25 + 21 + \ldots\ldots - 23 =$ কত?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা,
এখানে, প্রথম পদ, $a = 29$
সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$
মনে করি, n-তম পদ $= -23$
$\therefore\ a + (n-1)d = -23$
বা, $29 + (n-1).(-4) = -23$ [মান বসিয়ে]
বা, $29 - 4n + 4 = -23$
বা, $33 - 4n = -23$
বা, $-4n = -23 - 33$
বা, $-4n = -56$
$\therefore\ n = 14$
$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
$= \frac{14}{2}\{2.29 + (14-1).(-4)\}$ [মান বসিয়ে]
$= 7\{58 + 13.(-4)\}$
$= 7\{58 - 52\}$
$= 7 \times 6$
$= 42$
অতএব, ধারাটির সমষ্টি = 42 (Ans.)

১০। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d
$\therefore$ 12 তম পদ $= a + (12-1)d$
$= a + 11d$
প্রশ্নানুসারে, $a + 11d = 77$
$\therefore$ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি,
$S = \frac{23}{2}\{2a + (23-1)d\}$
$= \frac{23}{2}\{2a + 22d\}$
$= \frac{23}{2}.2(a + 11d)$
$= 23(a + 11d)$
$= 23 \times 77$ [$\because a + 11d = 77$]
$= 1771$
অতএব, প্রথম 23 পদের নির্ণেয় সমষ্টি 1771.

১১। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d
$\therefore$ 16 তম পদ $= a + (16-1)d$
$= a + 15d$
প্রশ্নানুসারে, $a + 15d = -20$
$\therefore$ ধারাটির -20 তম পদের সমষ্টি
$S = \frac{31}{2}\{2a + (31-1)d\}$
$= \frac{31}{2}\{2a + 30d\}$
$= \frac{31}{2} \times 2\{a + 15d\}$
$= 31 \times (-20)$
$= -620$
অতএব, প্রথম 31 পদের নির্ণেয় সমষ্টি -620।

১২। $9 + 7 + 5 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 9$
সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$
সমষ্টি, $S = -144$
পদ সংখ্যা, $n = ?$
আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,
$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
বা, $-144 = \frac{n}{2}\{2.9 + (n-1).-2\}$
বা, $-144 = \frac{n}{2}(18 - 2n + 2)$
বা, $-144 = \frac{n}{2}(20 - 2n)$
বা, $-144 = \frac{n}{2}.2(10 - n)$
বা, $n(10 - n) = -144$
বা, $10n - n^2 + 144 = 0$
বা, $-n^2 + 10n + 144 = 0$
বা, $n^2 - 10n - 144 = 0$
বা, $n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$
বা, $n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$
বা, $(n - 18)(n + 8) = 0$
$\therefore$ হয়, $n - 18 = 0$ অথবা, $n + 8 = 0$
$\therefore\ n = 18$ $\therefore\ n = -8$
[এখন, $n = -8$
গ্রহণযোগ্য নয় কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]
$\therefore\ n = 18$ (Ans.)

১৩। $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$
সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$
সমষ্টি $S = 2550$
পদ সংখ্যা $n = ?$
আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,
$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{2.2 + (n-1)2\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{4 + 2n - 2\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{2 + 2n\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}.2\{n + 1\}$

৯। $29 + 25 + 21 + \ldots\ldots - 23 =$ কত?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা,
এখানে, প্রথম পদ, $a = 29$
সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$
মনে করি, n-তম পদ $= -23$
$\therefore \ a + (n-1)d = -23$
বা, $29 + (n-1).(-4) = -23$ [মান বসিয়ে]
বা, $29 - 4n + 4 = -23$
বা, $33 - 4n = -23$
বা, $-4n = -23 - 33$
বা, $-4n = -56$
$\therefore \ n = 14$
$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
$= \frac{14}{2}\{2.29 + (14-1).(-4)\}$ [মান বসিয়ে]
$= 7\{58 + 13.(-4)\}$
$= 7\{58 - 52\}$
$= 7 \times 6$
$= 42$
অতএব, ধারাটির সমষ্টি = 42 (Ans.)

১০। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d
$\therefore$ 12 তম পদ $= a + (12-1)d$
$= a + 11d$
প্রশ্নানুসারে, $a + 11d = 77$
$\therefore$ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি,
$S = \frac{23}{2}\{2a + (23-1)d\}$
$= \frac{23}{2}\{2a + 22d\}$
$= \frac{23}{2}.2(a + 11d)$
$= 23(a + 11d)$
$= 23 \times 77$ [$\because a + 11d = 77$]
$= 1771$
অতএব, প্রথম 23 পদের নির্ণেয় সমষ্টি 1771.

১১। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ – 20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d
$\therefore$ 16 তম পদ $= a + (16-1)d$
$= a + 15d$
প্রশ্নানুসারে, $a + 15d = -20$
$\therefore$ ধারাটির – 20 তম পদের সমষ্টি
$S = \frac{31}{2}\{2a + (31-1)d\}$
$= \frac{31}{2}\{2a + 30d\}$
$= \frac{31}{2} \times 2\{a + 15d\}$
$= 31 \times (-20)$
$= -620$
অতএব, প্রথম 31 পদের নির্ণেয় সমষ্টি – 620।

১২। $9 + 7 + 5 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল – 144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 9$
সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$
সমষ্টি, $S = -144$
পদ সংখ্যা, $n = ?$
আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,
$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
বা, $-144 = \frac{n}{2}\{2 \cdot 9 + (n-1) \cdot -2\}$
বা, $-144 = \frac{n}{2}(18 - 2n + 2)$
বা, $-144 = \frac{n}{2}(20 - 2n)$
বা, $-144 = \frac{n}{2} \cdot 2(10 - n)$
বা, $n(10 - n) = -144$
বা, $10n - n^2 + 144 = 0$
বা, $-n^2 + 10n + 144 = 0$
বা, $n^2 - 10n - 144 = 0$
বা, $n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$
বা, $n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$
বা, $(n - 18)(n + 8) = 0$
$\therefore$ হয়, $n - 18 = 0$ অথবা, $n + 8 = 0$
$\therefore \ n = 18$ $\therefore \ n = -8$
[এখন, $n = -8$
গ্রহণযোগ্য নয় কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]
$\therefore \ n = 18$ (Ans.)

১৩। $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$
সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$
সমষ্টি $S = 2550$
পদ সংখ্যা $n = ?$
আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,
$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{2.2 + (n-1)2\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{4 + 2n - 2\}$
বা, $2550 = \frac{n}{2}\{2 + 2n\}$

বা, $2550 = n(n+1)$
বা, $2550 = n^2 + n$
বা, $n^2 + n = 2550$
বা, $n^2 + n - 2550 = 0$
বা, $n^2 + 52n - 51n - 2550 = 0$
বা, $n(n+52) - 51(n+52) = 0$
বা, $(n+52)(n-51) = 0$
হয়, $n + 52 = 0$ অথবা, $n - 51 = 0$
$\therefore n = -52$ $\therefore n = 51$

[পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore n = 51$ **(Ans.)**

১৪। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি n(n + 1) হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, n পদের সমষ্টি $= n(n+1)$
$= n^2 + n$

এখন,
$n = 1$ হলে, প্রথম পদ $= 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
$n = 2$ হলে, প্রথম দুই পদের সমষ্টি $= 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$
$n = 3$ হলে, প্রথম তিন পদের সমষ্টি $= 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$
$\therefore$ প্রথম পদ $= 2$
দ্বিতীয় পদ = দুই পদের সমষ্টি − প্রথম পদ $= 6 - 2 = 4$
তৃতীয় পদ = তিন পদের সমষ্টি − দুই পদের সমষ্টি $= 12 - 6 = 6$
অতএব, নির্ণেয় ধারাটি হবে, $2 + 4 + 6$ .... **(Ans.)**

১৫। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি n(n + 1) হলে, ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= n(n+1) = n^2 + n$
$\therefore$ ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি হবে $= 10^2 + 10$
$= 100 + 10$
$= 110$

অতএব, ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি 110 **(Ans.)**

১৬। একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ 12তম পদের সমষ্টি $= \frac{12}{2}\{2a + (12-1)d\}$

অর্থাৎ $\frac{12}{2}\{2a + (12-1)d\} = 144$

বা, $6\{2a + 11d\} = 144$

বা, $2a + 11d = \frac{144}{6}$

$\therefore 2a + 11d = 24$ .... (i)

আবার 20তম পদের সমষ্টি $= \frac{20}{2}\{2a + (20-1)d\}$

অর্থাৎ $\frac{20}{2}\{2a + (20-1)d\} = 560$

বা, $10\{2a + 19d\} = 560$

বা, $2a + 19d = \frac{560}{10}$

$\therefore 2a + 19d = 56$ .... (ii)

এখন, (ii)নং থেকে (i)নং বিয়োগ করে পাই,
$2a + 19d = 56$
$2a + 11d = 24$
(−) $8d = 32$
বা, $d = \frac{32}{8}$
$\therefore d = 4$

d এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$2a + 11.4 = 24$
বা, $2a + 44 = 24$
বা, $2a = 24 - 44$
বা, $2a = -20$
বা, $a = \frac{-20}{2}$
$\therefore a = -10$

$\therefore$ প্রথম 6 পদের সমষ্টি $= \frac{6}{2}\{2a + (6-1)d\}$
$= \frac{6}{2}\{2(-10) + 5 \times 4\}$
$= 3\{-20 + 20\}$
$= 3 \times 0$
$= 0$

অতএব প্রথম 6 পদের সমষ্টি 0 **(Ans.)**

১৭। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম (m + n) পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ m তম পদের সমষ্টি $= \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\}$

অর্থাৎ $n = \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\}$

বা, $2n = m\{2a + (m-1)d\}$

বা, $m\{2a + md - d\} = 2n$

$\therefore 2a + md - d = \frac{2n}{m}$ .... (i)

অর্থাৎ $m = \frac{n}{2}\{2a + nd - d\}$

বা, $2m = n\{2a + nd - d\}$

বা, $n\{2a + nd - d\} = 2m$

$\therefore\ 2a + nd - d = \frac{2m}{n}$ .... (ii)

এখন (i) থেকে (ii)নং বিয়োগ করে পাই

$$2a + md - d = \frac{2n}{m}$$

$$2a + nd - d = \frac{2m}{n}$$

$$md - nd = \frac{2n}{m} - \frac{2m}{n}$$

বা, $d(m - n) = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn}$

বা, $d(m - n) = \frac{2\{(n + m)(n - m)\}}{mn}$

বা, $d = -\frac{2(m + n)(m - n)}{mn(m - n)}$

$\therefore\ d = -\frac{2(m + n)}{mn}$

d এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$2a + m\left\{\frac{-2(m + n)}{mn}\right\} - \left\{\frac{-2(m + n)}{mn}\right\} = \frac{2n}{m}$$

বা, $2a - \frac{2(m + n)}{n} + \frac{2(m + n)}{mn} = \frac{2n}{m}$

বা, $a - \frac{(m + n)}{n} + \frac{m + n}{mn} = \frac{n}{m}$

বা, $a = \frac{n}{m} + \frac{m + n}{n} - \frac{m + n}{mn}$

বা, $a = \frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn}$

$\therefore\ a = \frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn}$

এখন, $m + n$ পদের সমষ্টি $= \frac{m + n}{2}\{2a + (m + n - 1)d\}$

$$= \frac{m + n}{2}\left\{2\left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn}\right) + (m + n - 1)\left(\frac{-2(m + n)}{mn}\right)\right\}$$

$$= \frac{m + n}{2}\left\{2\left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn} - \frac{(m + n - 1)\,2(m + n)}{mn}\right)\right\}$$

$$= \frac{m + n}{2}\left\{2\left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn} - \frac{m^2 + mn - m + mn + n^2 - n}{mn}\right)\right\}$$

$$= \frac{m + n}{2} \times 2\left(\frac{n^2 + m^2 - m + mn - n - m^2 - mn + m - mn - n^2 + n}{mn}\right)$$

$$= (m + n)\left(\frac{-mn}{m}\right)$$

$$= (m + n)(-)$$

 $= -(m + n)$ (Ans.)

১৮। কোনো সমান্তর ধারার p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$

সমাধান : মনে করি প্রথম পদ $= x$

সাধারণ অন্তর $= d$

$\therefore$ p তম পদ $= x+(p-1)d$

অর্থাৎ $x+(p-1)d=a$

বা, $x+pd-d=a$ .... (i)

q তম পদ $= x+(q-1)d$

অর্থাৎ $x+(q-1)d=b$

বা, $x+qd-d=b$ .... (ii)

এবং r তম পদ $= x+(r-1)d$

অর্থাৎ $x+(r-1)d=c$

বা, $x+rd-d=c$ .... (iii)

এখন, (i) নং (–) (ii)নং করে পাই,

$pd-d-qd+d=a-b$

বা, $pd-qd=a-b$ .... (iv)

(ii)নং (–) (iii)নং করে পাই,

$qd-d-rd+d=b-c$

বা, $qd-rd=b-c$ .... (v)

এবং (iii)নং (–) (i)নং করে পাই,

$rd-d-pd+d=c-a$

বা, $rd-pd=c-a$ .... (vi)

$\therefore$ L.H.S $= a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)$

$= aq-ar+br-bp+cp-cq$

$= -aq+ar-br+bp-cp+cq$ [– দ্বারা গুণ করে]

$= q(c-a)+p(b-c)+r(a-b)$

$= q(rd-pd)+p(qd-pd)+r(pd-qd)$

[$\therefore$ iv, v, vi নং ব্যবহার করে]

$= qrd-pdd+pqd-prd+prd-qrd$

$= 0$

$=$ R.H.S

$\therefore a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$ **(Showed)**

বিকল্প পদ্ধতি

সমাধান : সমান্তর ধারাটির ১ম পদ $= x$

এবং " " সাধারণ অন্তর $= d$

এখন, p–তম পদ $= a$

বা, $x+(p-1)d=a$ .... (i)

$\therefore$ q–তম পদ $= b$

বা, $x+(q-1)d=b$ .... (ii)

এবং r–তম পদ $= c$

বা, $x+(r-1)d=c$ .... (iii)

এখন, L.H.S $= a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)$

$= \{x+(p-1)d\}(q-r)+\{x+(q-1)d\}(r-p)+\{x+(r-1)d\}(p-q)$

$= x(q-r)+(p-1)(q-r)d+x(r-p)+(q-1)(r-p)d+x(p-q)+(r-1)(p-q)d$

$= x(q-r+r-p+p-q)+d\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}$

$= x\times 0+d\{pq-pr-q+r+qr-pq+p-r+pr-p+q\}$

$= 0+d\times 0$

$= 0+0=0$

$=$ R.H.S

$\therefore$ L.H.S $=$ R.H.S **(Showed)**

১৯। দেখাও যে, $1+3+5+7+ \ldots\ldots + 125 = 169+171+173+\ldots\ldots+209$

সমাধান : L.H.S $= 1+3+5+7+\ldots\ldots+125$

এখানে, প্রথম পদ $a=1$

সাধারণ অন্তর $d=3-1=2$

$\therefore$ n তম পদ, $a+(n-1)d=125$

বা, $1+(n-1)2=125$

বা, $1+2n-2=125$

বা, $2n-1=125$

বা, $2n=125+1$

বা, $2n=126$

বা, $n=\frac{126}{2}$

$\therefore n=63$

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{63}{2}\{2\cdot1+(63-1)2\}$

$=\frac{63}{2}\{2+62\times2\}$

$=\frac{63}{2}\{2+124\}$

$=\frac{63}{2}\times126$

$=63\times63$

$=3969$

R.H.S $= 169+171+173+\ldots\ldots+209$

এখানে, প্রথম পদ $a=169$

সাধারণ অন্তর $d=171-169=2$

$\therefore$ n তম পদ, $a+(n-1)d=209$

বা, $169+(n-1)2=209$

বা, $169+2n-2=209$

বা, $167+2n-2=209$

বা, $167+2n=209$

বা, $2n=209-167$

বা, $2n=42$

বা, $n=\frac{42}{2}$

$\therefore n=21$

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{21}{2}\{2\cdot169+(21-1)2\}$

$=\frac{21}{2}\{338+40\}$

$=\frac{21}{2}\times378$

$=21\times189$

$=3969$

$\therefore$ L.H.S $=$ R.H.S **(Showed)**

২০। এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

সমাধান : প্রশ্নের বর্ণনা অনুযায়ী ধারাটি হবে একটি সমান্তর ধারা। আর তা হলো—

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2500, যেখানে n এর মানই হবে নির্ণেয় কিস্তির পরিমাণ।

এখন, মনে করি ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$

এবং সাধারণ অন্তর $d = 3 - 1 = 2$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

অর্থাৎ $2500 = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2}\{2\cdot1 + (n-1)2\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2}\{2 + 2n - 2\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2}\{2n\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2} \times 2n$

বা, $2500 = n^2$

বা, $n^2 = 2500$

বা, $n = \sqrt{2500}$

$\therefore\ n = 50$

অতএব, 50টি কিস্তিতে ঐ ব্যক্তির ঋণ শোধ করতে পারবেন। **(Ans.)**

অনুশীলনী- ১৩.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ :

পৃষ্ঠা : ২২৩

১। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি S_n

অর্থাৎ $S_n = 2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + n$

এখানে, প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2.2 + (n-1)2\}$

$= \frac{n}{2}\{4 + 2n - 2\}$

$= \frac{n}{2}\{2n + 2\}$

$= \frac{n}{2}.2(n+1)$

$= n(n+1)$

$\therefore$ n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি $= n(n+1)$ **(Ans.)**

২। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ১ম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, S_n।

অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + n^2$

আমরা জানি, $(r-2)^3 = r^3 - 6r^2 + 12r - 8$

বা, $r^3 - (r-2)^3 = 6r^2 - 12r + 8$

উপরের অভেদটিতে $r = 1, 3, 5 \ldots\ldots$ n বসিয়ে পাই,

$1^3 - (1-2)^3 = 6.1^2 - 12.1 + 8$

$3^3 - 1^3 = 6.3^2 - 12.3 + 8$

$5^3 - 3^3 = 6.5^2 - 12.5 + 8$

....

....

$n^3 - (n-2)^3 = 6.n^2 - 12.n + 8$

যোগ করে পাই, $n^3 - (-1)^3 = 6(1^2+3^2+5^2+\ldots + n^2) - 12(1+3+5+\ldots) + 8(1+1+1+\ldots+n)$

বা, $n^3 + 1 = 6.S_n - {}^6\!\!/\!\!12.\frac{n(n+1)}{2} + 8.n$

বা, $6.S_n = n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1$

বা, $S_n = \frac{n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1}{2}$

$\therefore S_n = \frac{n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1}{2}$ **(Ans.)**

কাজ :

[পৃষ্ঠা- ২২৩]

নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লেখ :

(i) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10 (ii) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ (iii) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ (iv) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1 (v) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$ (vi) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত -1.

সমাধান :

i) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে, প্রথম পদ, $a = 4$, সাধারণ অনুপাত $r = 10$

$\therefore$ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = ar = 4.10 = 40$ $[\because a = 4, r = 10]$

ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = 4.10^2 = 400$

ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 4.10^3 = 4000$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটি $= 4 + 40 + 400 + 4000 + \ldots$

iii) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

দেওয়া আছে, $a = 9; r = \frac{1}{3}$

ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = ar = 9.\frac{1}{3} = 3$

ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9\frac{1}{9} = 1$

ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9.\frac{1}{27} = \frac{1}{3}$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটি $= 9 + 3 + 1\frac{1}{3} +$ ....

iv) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

দেওয়া আছে, $a = 7; r = \frac{1}{10}$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ, $ar^{2-1} = ar = 7.\frac{1}{10} = \frac{7}{10}$

ধারাটির তৃতীয় পদ, $= ar^{3-1} = ar^2 = 7.\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{7}{100}$

ধারাটির চতুর্থ পদ, $= ar^{4-1} = ar^3 = 7.\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{7}{1000}$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটি $= 7 + \frac{7}{10} = \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} +$ ....

v) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

দেওয়া আছে, $a = 3; r = 1$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = ar = 3.1 = 3$

ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = 3.1^2 = 3$

ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 3.1^3 = 3$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটির $= 3 + 3 + 3 + 3 +$ ....

v) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $\frac{-1}{2}$

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

দেওয়া আছে, $a = 1; r = \frac{-1}{2}$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = ar = 1.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = 1.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 1.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটি $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} +$ ....

vi) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত –1.

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

দেওয়া আছে, $a = 3; r = -1$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = ar = 3(-1) = -3$

ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = 3.(-1)^2 = 3.1 = 3$

ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 3.(-1)^3 = 3(-1) = -3$

....

....

অতএব, নির্ণেয় ধারাটি $= 3 - 3 + 3 - 3 +$

....

☐ **কাজ:** [পৃষ্ঠা– ২২৫]

ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো– প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

সমাধান:

প্রথম দিনের পারিশ্রমিক = 1 পয়সা,

দ্বিতীয় দিনের পারিশ্রমিক $= 1 \times 2 = 2$ পয়সা

তৃতীয় দিনের পারিশ্রমিক $= 2 \times 2 = 4$ পয়সা

এটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{2}{1} = 2$

পদসংখ্যা বা দিনের সংখ্যা, $n = 30$

n টি পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

30 " " $S_{30} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$= \frac{1(1073741824 - 1)}{1}$

$= 1073741823$ পয়সা

$= 10737418.23$ টাকা (Ans)

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ যখন $r < 1$

সুতরাং, ধারাটির ৪টি পদের সমষ্টি

$$S_8 = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{256-1}{256}\right) = \frac{255}{128} = 1\frac{127}{128} \text{ (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৩.২

১। a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $b = \frac{c+d}{2}$ খ) $a = \frac{b+c}{2}$

গ) $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ) $d = \frac{a+c}{2}$

উত্তর : গ) $c = \frac{b+d}{2}$

২। i) $a + (a + d) + (a + 2d)$ .... ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

ii) $1 + 2 + 3 .... + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : খ) i ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + ...$

৩। ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক) ২ খ) 4

গ) log 2 ঘ) 2 log2

উত্তর : গ) log2

৪। ধারাটির 7ম পদ কত?

ক) log 32 খ) log 64

গ) log 128 ঘ) log 256

উত্তর : গ) log 128

৫। $64 + 32 + 16 + 8 + ...$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধারাটি একটি গুনোত্তর ধারা,

এর প্রথম পদ, $a = 64$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

পদ সংখ্যা $n = 8$

∴ ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{8-1}$

$= ar^7$

$= 64.\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$= \frac{64}{27} \quad = \frac{64}{128} \quad = \frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় অষ্টম পদ $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

৬। $3 + 9 + 27 + ...$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, এর প্রথম পদ, $a = 3$ সাধারণ অনুপাত $q = \frac{9}{3} = 3$ এবং পদ সংখ্যা $n = 14$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত, $3 > 1$

সুতরাং $s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

∴ প্রথম 14 পদের সমষ্টি $s = \frac{3(3^{14} - 1)}{3-1}$

$= \frac{3(4782969 - 1)}{2}$

$= \frac{3 \times 4782968}{2}$

$= 7174452$ (Ans.)

৭। $128 + 64 + 32 + ...$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

সমাধান : ধরি, ধারাটির n তম পদ $= \frac{1}{2}$

এখানে ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$

সাধারণ অনুপাত $q = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

আমরা জানি, n তম পদ $= q^{n-1}$

প্রশ্নমতে $aq^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2 \times 128}$

বা, $\frac{1}{(2)^{n-1}} = \frac{1}{256}$

বা, $\frac{1}{(2)^{n-1}} = \frac{1}{28}$

বা, $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{8}$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

∴ $n = 9$

অতএব, ধারাটির নবম পদ $\frac{1}{2}$ (Ans.)

৮। একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং সাধারণ অনুপাত = r
তাহলে, পঞ্চম পদ = $ar^{5-1} = ar^4$
এবং দশম পদ = $ar^{10-1} = ar^9$

প্রশ্নানুসারে, $ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ .... (i)

এবং $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ .... (ii)

এখন, (i)নং সমীকরণকে (ii)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{81}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

বা, $r^5 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5$

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

এখন, সমীকরণ (ii)নং এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$a\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $a \cdot \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$[\because (\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4]$

$\therefore\ a = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1}$

$= ar^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ [a ও r এর মান বসিয়ে]

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

অতএব, ধারাটির তৃতীয় পদ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

৯। $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}$, ... ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

সমাধান : ধরি, ধারাটির n তম পদ = $8\sqrt{2}$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $q = -\sqrt{2}$

আমরা জানি, n তম পদ = aq^{n-1}

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $aq^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8 \times 2$

বা, $\frac{(-\sqrt{2})^n}{-\sqrt{2}} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^n = -16 \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^n = (-\sqrt{2})^9$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ = $8\sqrt{2}$ **(Ans.)**

১০। 5 + x + y + 135 গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, a = 5
মনে করি, সাধারণ অনুপাত = r
তাহলে, দ্বিতীয় পদ, ar = x
তৃতীয় পদ, $ar^2 = y$
এবং চতুর্থ পদ, $ar^3 = 135$
বা, $5.r^3 = 135$ $[\because a = 5]$
বা, $r^3 = 27$ [উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $r^3 = 3^3$
$\therefore r = 3$
$\therefore$ দ্বিতীয় পদ, x = ar = 5.3 = 15
এবং তৃতীয় পদ, $y = ar^2 = 5(3)^2 = 5.9 = 45$
অতএব, x ও y এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 15 ও 45.

১১। 3 + x + y + z + 243 গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ a = 3
মনে করি, সাধারণ অনুপাত = r
তাহলে, দ্বিতীয় পদ ar = x
তৃতীয় পদ $ar^2 = y$
চতুর্থ পদ $ar^3 = z$
এবং পঞ্চম পদ $ar^4 = 243$
বা, $3 \cdot r^4 = 243$
বা, $r^4 = \frac{243}{3}$
বা, $r^4 = 81$
বা, $r^4 = 34$
$\therefore r = 3$
অতএব, দ্বিতীয় পদ $3 \cdot 3 = x$ বা, $9 = x$
তৃতীয় পদ $3 \cdot (3)^2 = y$
বা, $3 \cdot 9 = y$
বা, $27 = y$
চতুর্থ পদ $3 \cdot (3)^3 = z$
বা, $3 \cdot 27 = z$
বা, $81 = z$

সুতরাং x, y ও z এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 9, 27 ও 81. **(Ans.)**

১২। $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, এর প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-4}{2} = -2$

পদসংখ্যা, $n = 7$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-2 < 1$,

সুতরাং, $S = a\frac{(1-r^n)}{1-r}$ সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি, $S = 2.\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}$ [মান বসিয়ে]

$= 2.\frac{1+2^7}{1+2}$

$= 2.\frac{1+128}{3}$

$= 2.\frac{129}{3}$

$= \frac{258}{3} = 86$

অতএব, ধারাটির প্রথম সাতটি পদের নির্ণেয় সমষ্টি = 86. (Ans.)

১৩। $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ ধারাটির $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{1} = -1$

পদ সংখ্যা $= 2n + 1$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-1 < 1$, সুতরাং $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

$(2n+1)$ পদের সমষ্টি $= 1.\frac{1-(-1)^{2n+1}}{1-(-1)}$

$= \frac{1-(-1)}{1+1}$

[এখানে $2n + 1$ বিজোড় সংখ্যা]

$= \frac{1+1}{2}$

$= \frac{2}{2} = 1$

অতএব, ধারাটির $(2n + 1)$ পদের নির্ণেয় সমষ্টি = 1. (Ans.)

১৪। $\log2 + \log4 + \log8 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির সমষ্টি = S

তাহলে, $S = \log2 + \log4 + \log8 + \ldots\ldots$ 10টি পদ।

$= \log2 + \log4 + \log8 + \ldots\ldots$ দশম পদ

$= \log2 + \log2^2 + \log2^3 + \ldots\ldots + \log2^{10}$

$= \log2 + 2\log2 + 3\log2 + \ldots\ldots + 10\log2$

[$\because \log a^n = n\log a$]

$= \log2\,[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10]$

$= [1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10] \times \log2$

$\therefore S = [1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10] \times \log2$

$= \frac{10(10+1)}{2} \times \log2$

[$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$ সূত্র প্রয়োগ করে]

$= 55 \times \log2$

$= 55\log2$

অতএব, ধারাটির প্রথম দশটি পদের নির্ণেয় সমষ্টি = $55\log2$. (Ans.)

১৫। $\log2 + \log16 + \log512 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি ধারাটির সমষ্টি = S

তাহলে, $S = \log2 + \log16 + \log512 + \ldots\ldots$ 12টি পদ

$= \log2 + \log16 + \log512 + \ldots\ldots$ 12তম পদ

$= \log2 + \log2^4 + \log2^9 + \ldots\ldots$ 12তম পদ

$= \log2 + 4\log2 + 9\log2 + \ldots\ldots$ 12তম পদ

[$\therefore \log a^n = n\log a$]

$= (1 + 4 + 9 + \ldots\ldots$ 12তম পদ$) \times \log2$

$= (1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots 12^2) \times \log2$

$= \left\{\frac{12(12+1)(2\times12+1)}{6}\right\}\log2$

$= \frac{12\times13\times25}{6} \times \log2$

$\left[\because 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$= 650\log2$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার প্রথম বার পদের সমষ্টি = $650\log2$ (Ans.)

১৬। $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots$ ধারাটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{4}{2} = 2$

দেয়া আছে, n তম পদের সমষ্টি = 254

আমরা জানি, n তম পদের সমষ্টি $= \frac{a(q^n-1)}{q-1}$

বা, $254 = \frac{2(2^n-1)}{2-1}$

বা, $254 = \frac{2(2^n-1)}{1}$

বা, $2(2^n-1) = 254$

বা, $2^n - 1 = 127$

বা, $2^n = 127 + 1$

বা, $2^n = 128$

বা, $2^n = 2^7$

$\therefore n = 7$ (Ans.)

১৭। $2 - 2 + 2 - 2 + \ldots\ldots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-2}{2} = -1$

পদ সংখ্যা $= 2n + 2$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-1 < 1$ সুতরাং $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

$(2n + 2)$ পদের সমষ্টি $= \frac{2\{1-(-1)^{2n+2}\}}{1-(-1)}$

$= \frac{2\{1-(1)\}}{1+1}$ [এখানে, $2n + 2$ জোড় সংখ্যা]

$= \frac{2(1-1)}{2}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

অতএব, ধারাটির $(2n + 2)$ পদের সমষ্টি $= 0$ (Ans.)

১৮। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 441$

বা, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 21^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 21$

বা, $n(n+1) = 42$

বা, $n^2 + n = 42$

বা, $n^2 + n - 42 = 0$

বা, $n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$

বা, $n(n+7) - 6(n+7) = 0$

বা, $(n+7)(n-6) = 0$

বা, $n + 7 = 0$ অথবা $n - 6 = 0$

$\therefore$ $n = -7$ $\therefore n = 6$

কিন্তু n এর ঋণাত্মক মান হতে পারে না

$\therefore n = 6$ (Ans.)

২য় অংশ : আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{6(6+1)}{2}$ [n = 6 বসিয়ে]

$= \frac{6 \times 7}{2}$

$= \frac{42}{2}$

$= 21$ (Ans.)

১৯। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225$

বা, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = (15)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 15$ [বর্গমূল করে]

বা, $n(n+1) = 30$

বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $n(n+6) - 5(n+6) = 0$

বা, $(n+6)(n-5) = 0$

বা, $n + 6 = 0$ নতুবা $n - 5 = 0$

$\therefore$ $n = -6$ অথবা 5

কিন্তু n এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না

$\therefore$ $n = 5$

দ্বিতীয় অংশ : আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

এখানে, $n = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= \frac{5(5+1)(2.5+1)}{6}$

$= 5 \times 6(10+1)$

$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$

$= 55.$

অতএব, n এর নির্ণেয় মান 5 এবং ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের নির্ণেয় সমষ্টি = 55

২০। দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots\dots + 10)^2$

সমাধান : বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots\dots + 10^3$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন এর সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

এখানে, পদ সংখ্যা, $n = 10$

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি $= \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2$

$= (5 \times 11)^2$

$= (55)^2$

$= 3025$

আবার, ডানপক্ষ $= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots + 10)^2$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

অর্থাৎ, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

এখানে, ধারাটির পদসংখ্যা, $n = 10$

$\therefore$ ধারাটির সমষ্টি $= \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2$

$= (5 \times 11)^2$

$= (55)^2$

$= 3025$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো।)

২১। $\dfrac{1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3}{1+2+3+\dots\dots\dots+n} = 210$ হলে n এর মান কত?

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\dfrac{1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3}{1+2+3+\dots\dots\dots+n} = 210$

বা, $\dfrac{\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = 210$

বা, $\dfrac{\dfrac{n^2(n+1)(n+1)}{4}}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = 210$

বা, $\dfrac{n^2(n+1)(n+1)}{4} \times \dfrac{2}{n(n+1)} = 210$

বা, $\dfrac{n(n+1)}{2} = 210$

বা, $n^2+n = 420$

বা, $n^2+n-420 = 0$

বা, $n^2+21n-20n-420 = 0$

বা, $n(n+21)-20(n+21) = 0$

বা, $(n+21)(n-20) = 0$

বা, $n+21 = 0$ বা, $n-20 = 0$

$\therefore$ $n = -21$ বা, $n = 20$

এক্ষেত্রে n-এর ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ $n = 20$

অতএব, n- এর নির্ণেয় মান = 20. (Ans.)

২২। মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে লোহার দন্ডের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য s = 1 মিটার = 1000 মিলিমিটার

ধরি, প্রথম টুকরার দৈর্ঘ্য = a

দশম টুকরার দৈর্ঘ্য = ar^9, যেখানে r সাধারণ অনুপাত।

প্রশ্নমতে, $ar^9 = 10a$

বা, $r^9 = 10$

বা, $r = 10^{1/9}$

$\therefore$ $r = 1{\cdot}29$ প্রায় [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]

$\therefore$ দশ পদের সমষ্টি, $S = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}$ $\quad [\because r > 1]$

বা, $100 = \dfrac{\{a(1{\cdot}29)^{10}-1\}}{(1{\cdot}29-1)}$ [S ও r এর মান বসিয়ে]

বা, $1000 = \dfrac{a(12.76-1)}{{\cdot}29}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

বা, $1000 = \dfrac{a \times 11{\cdot}76}{{\cdot}29}$

বা, $a \times 11{\cdot}76 = 1000 \times {\cdot}29$

বা, $a = \dfrac{1000 \times {\cdot}29}{11{\cdot}76}$

বা, $a = \dfrac{290}{11.76}$

বা, $a = 24.6598$

$\therefore$ $a = 24.66$ (প্রায়)

ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 24.66 মিলিমিটার

Ans. 24.66 মিলিমিটার।

২৩। একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ−2 এবং ৯ম পদ $8\sqrt{2}$.

ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ধারাটির 12তম পদ নির্ণয় কর।

গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, গুণোত্তর ১ম পদ = a

এবং সাধারণ অনুপাত = r

সুতরাং ৪র্থ পদ = $ar^{4-1} = ar^3$

এবং ৯ম পদ = $ar^{9-1} = ar^8$

প্রশ্নমতে, $ar^3 = -2$ .... (i)

$ar^8 = 8\sqrt{2}$ .... (ii)

খ) সমাধান ক এর (ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\dfrac{ar^8}{ar^3} = \dfrac{8\sqrt{2}}{-2}$

বা, $r^{8-3} = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = -\{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}\}$

বা, $r^5 = -\{\sqrt{2}^5\}$

বা, $r^5 = -\sqrt{2}^5$

$\therefore$ $r = -\sqrt{2}$

r- এর মান (ii)নং বসিয়ে পাই

$a(-\sqrt{2})^8 = 8\sqrt{2}$

বা, $a\sqrt{2}^8 = 8\sqrt{2}$

বা, $a = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}^8}$

বা, $a = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ $\quad [\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2]$

$\therefore$ $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ধারাটির 12তম পদ $= ar^{12-1}$

$= ar^{11}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{11}$

$= \dfrac{-\sqrt{2}^{11}}{\sqrt{2}}$

$= -\sqrt{2}^{11-1}$

$= -\sqrt{2}^{10}$

$= -32$ (Ans.)

গ) যেহেতু $r < 1$ তাই $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-(-\sqrt{2})^7)}{1-(-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}^7)}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{2}^7}{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}^7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} \text{ (Ans.)}$$

২৪। কোনো ধারার n তম পদ $2n - 4$

ক) ধারাটির নির্ণয় কর।

খ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ) প্রাপ্ত ধারাটি প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, ধারার n তম পদ $2n - 4$

এখন $n = 1, 2, 3$ .... বসিয়ে ধারাটি নির্ণয় করা হলো

অর্থাৎ $n = 1$ হলে $2n - 4 = 2\cdot1 - 4 = -2$

$n = 2$ হলে $2n - 4 = 2\cdot2 - 4 = 0$

$n = 3$ হলে $2n - 4 = 3\cdot2 - 4 = 2$

সুতরাং ধারাটি হলো, $-2 + 0 + 2 +$ ....

এটি একটি সমান্তর ধারা।

খ) মনে করি সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a = -2$

এবং সাধারণ অন্তর $d = 0 - (-2) = 2$

$\therefore$ 10 তম পদ $= a + (10-1)d$

$= -2 + 9d$

$= -2 + 9 \times 2$

$= 16$ (Ans.)

এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি $S_{20} = \frac{20}{2}\{2a + (20-1)d\}$

$= 10\{2a + 19 \times 2\}$

$= 10\{2.(-2) + 38\}$

$= 10\{-4 + 38\}$

$= 10 \times 34$

$= 340$ (Ans.)

গ) গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $a = -2$

" " সা: অনুপাত $r = 2$

" " ২য় পদ $= ar^{2-1}$

$= ar$

$= -2 \times 2$

$= -4$

" " ৩য় পদ $= ar^{3-1}$

$= ar^2$

$= -2 \times (2)^2$

$= -8$

$\therefore$ ধারাটি $-2 - 4 - 8$.............

গুণোত্তর ধারার 8 পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1}$

$= \frac{-2(28-1)}{2-1}$

$= -2(256 - 1)$

$= -2 \times 255$

$= -510$ (Ans.)

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $3 + 6 + 12 +$ .... ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত? [বরগুনা জিলা স্কুল]

ক 3 খ 2 গ 4 ঘ 12 — উত্তর: খ

২. $7 + 12 + 17 +$ .... ধারাটির 25টি পদের সমষ্টি কত? [শহীদ বীর উত্তম লে: আনোয়ার গার্লস কলেজ]

ক 1075 খ 1675 গ 1225 ঘ 1600 — উত্তর: খ

৩. $\log2 + \log4 + \log8 +$ .... ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি কত? [ভিক্টোরিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

ক 55log2 খ 21log2 গ 42og2 ঘ 36log2 — উত্তর: ক

৪. যদি কতগুলো সংখ্যাকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় .... এভাবে পরপর সাজানো হয়, তাহলে তাকে কী বলে?

ক ধারা খ অনুরাশি গ অনুক্রম ঘ অভিসৃত — উত্তর: গ

৫. অনুক্রমের পদগুলোকে কোন চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়?

ক '+' যোগ খ '−' বিয়োগ গ '×' গুণন ঘ '÷' ভাগ — উত্তর: ক

৬. কোনো ধারার শেষ পদ না থাকলে তাকে কোন ধারা বলা হয়?

ক সসীম ধারা খ অসীম ধারা গ সমান্তর ধারা ঘ গুণোত্তর ধারা — উত্তর: খ

৭. $20 + 18 +$ .... $+ 6 + 4 + 2$ ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

ক −2 খ −1 গ 4 ঘ 5 — উত্তর: ক

অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেখাংশের অন্তর্বিভক্তি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রতিসমতার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হাতে-কলমে বাস্তব উপকরণের সাহায্যে রেখা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা যাচাই করতে পারবে।

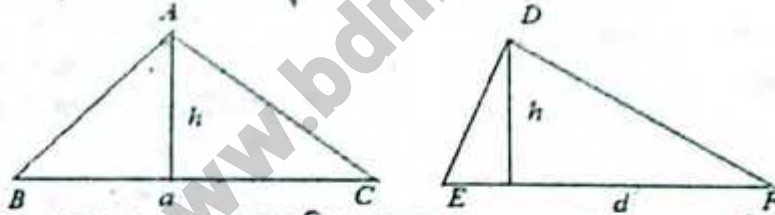
যা মনে রাখতে হবে...

অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম

i) $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$
ii) $a : b = b : a$ হলে, $a = b$
iii) $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ (ব্যস্তকরণ)
iv) $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ (একান্তরকরণ)
v) $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)
vi) $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)
এবং $a - b : b = x - y : y$ (বিয়োজন)
vii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

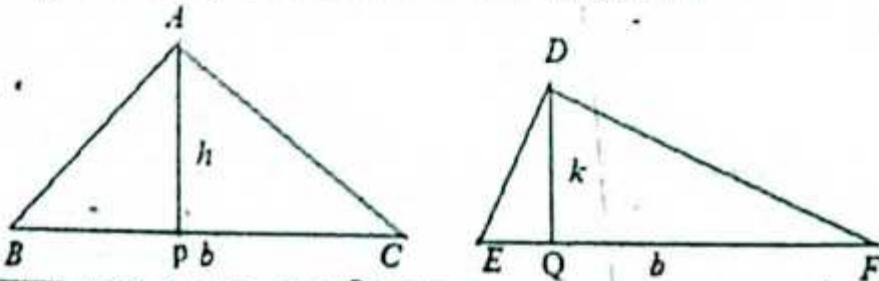
জ্যামিতিক সমানুপাত:

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

১. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h। সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h : \frac{1}{2} d \times h$

$= a : d = BC : EF$।

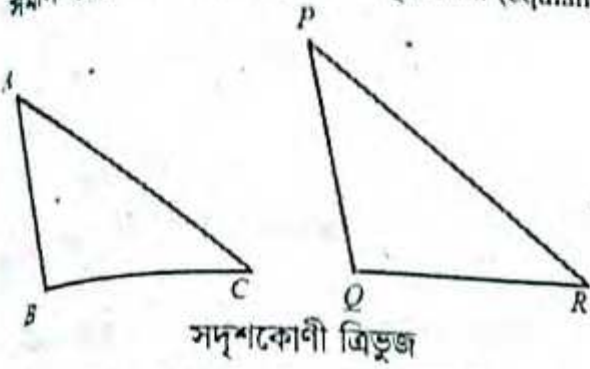
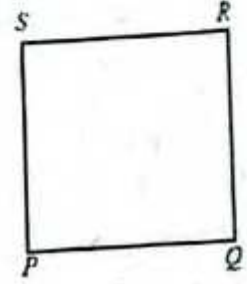
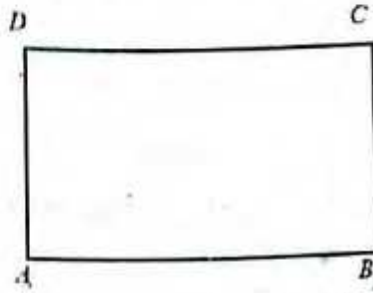
২. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।

মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয় ক্ষেত্রের ভূমি b। সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d \times k$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h : \frac{1}{2} b \times h$

$= h : k = AP : DQ$।

সদৃশতা (Similarity)

সপ্তম শ্রেণিতে ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। সাধারণভাবে, সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ, তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

সদৃশকোণী বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (equiangular) বলা হয়।

সদৃশকোণী ত্রিভুজ সদৃশকোণী চতুর্ভুজ

সদৃশ বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বহুভুজ বলা হয়।

উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, ABCD আয়ত ও PQRS বর্গ সদৃশকোণী। কারণ, উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা ৪ এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশ নয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। অর্থাৎ, সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

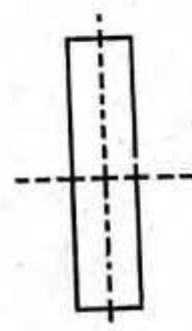
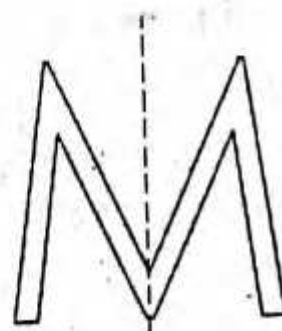
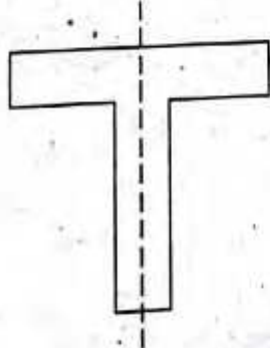
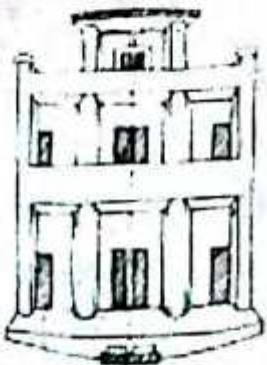
নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে, AB রেখায় এমন অনন্য বিন্দু X আছে যে, X বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং AX ঃ XB = m ঃ n.

$$\underset{A}{} \overset{m}{\rule{3cm}{0.4pt}} \underset{X}{} \overset{n}{\rule{3cm}{0.4pt}} \underset{B}{}$$

ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। তাহলে, AX ঃ XB = m ঃ n.

প্রতিসমতা

প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারণা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমাদের কর্মকাণ্ডে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। প্রতিসমতার ধারণাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার, সুতাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। গাছের পাতা, ফুল, মৌচাক, ঘরবাড়ি, টেবিল, চেয়ার সবকিছুর মধ্যে প্রতিসমতা বিদ্যমান। যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে, তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।

উপরের চিত্রগুলোর প্রতিটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। শেষের চিত্রটির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা

বহুভুজ কতকগুলো রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র। বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে তাকে সুষম বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ।

সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রেরও বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুষম পঞ্চভুজ ও সুষম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।

সমবাহু ত্রিভুজ বর্গক্ষেত্র সুষম পঞ্চভুজ সুষম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুষম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যক। সুষম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুষম পঞ্চভুজ	সুষম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

☐ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রধান : ধাপসমূহ	যথার্থতা
১। ΔABC এবং ΔADC একই উচ্চতা বিশিষ্ট। $\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{AB}{AD}$	১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।
২। $\frac{\Delta ABC}{\Delta ABE} = \frac{AC}{AE}$	২। [একই]
৩। কিন্তু ΔBDE = ΔDEC	৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রেরও বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুষম পঞ্চভুজ ও সুষম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।

সমবাহু ত্রিভুজ

বর্গক্ষেত্র

সুষম পঞ্চভুজ

সুষম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুষম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যক। সুষম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুষম পঞ্চভুজ	সুষম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

☐ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপসমূহ	যথার্থতা
১। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$ একই উচ্চতা বিশিষ্ট। $\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{AB}{AD}$	১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।
২। $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}$	২। [একই]
৩। কিন্তু $\triangle BDE = \triangle DEC$	৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta ADE + \Delta BDE = \Delta ADE + \Delta DEC$

বা, $\Delta ABE = \Delta ADC$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABE}$ [১ নং ও ২ নং হতে]

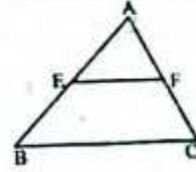
৪। $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ [১ নং, ২ নং ও ৩ নং হতে]

৫। $\frac{AB}{AB - AD} = \frac{AC}{AC - AE}$

বা, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ (প্রমাণিত)

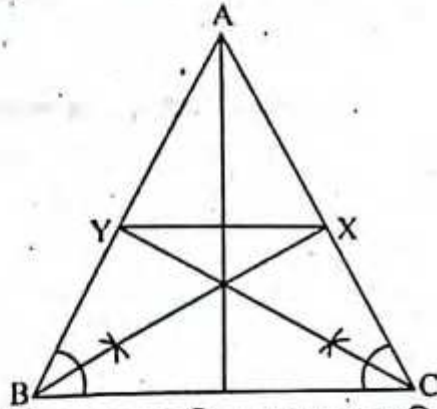
অনুসিদ্ধান্ত-২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু E। E বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল EF সরলরেখা AC কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AF = FC।

প্রধান : ধাপসমূহ	যথার্থতা
১। ΔABC এ EF ∥ BC $\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC}$	[ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।]
২। $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{AE}$	[AE = BE]
৩। AF = FC (প্রমাণিত)	

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৪.১

১। কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর ভূমি সংলগ্ন $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে অর্থাৎ AC ও AB-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমি BC-এর সমান্তরাল। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC সমদ্বিবাহু অর্থাৎ AB = AC।

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক BX।

$\therefore AB : BC = AX : XC$ .... (i)

আবার, ΔABC-এ $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক CY

$\therefore AC : BC = AY : YB$ .... (ii)

যেহেতু XY ∥ BC

সেহেতু $AX : XC = AY : YB$ .... (iii)

[∵ ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

সমীকরণ (i) ও (iii) থেকে পাই,

$AB : BC = AY : YB$ .... (iv)

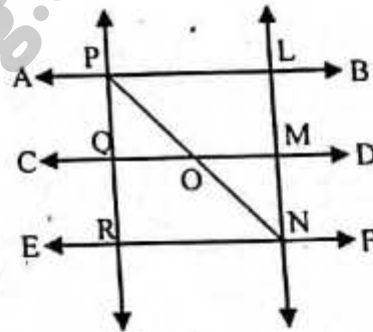
আবার সমীকরণ (ii) ও (iv) নং হতে পাই,

$AB : BC = AC : BC$.

$\therefore AB = AC$

অর্থাৎ ΔABC সমদ্বিবাহু (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে; কতকগুলো পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা। PQR ও LMN দুইটি সরলরেখা উক্ত সরলরেখাগুলোকে যথাক্রমে P,L; Q,M; R,N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ : QR = LM : MN$.

অঙ্কন : P,N যোগ করি। PN সরলরেখা QM সরলরেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔPRN-এ QO ∥ RN

$\therefore PQ : QR = PO : ON$ ....(i)

[∵ ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

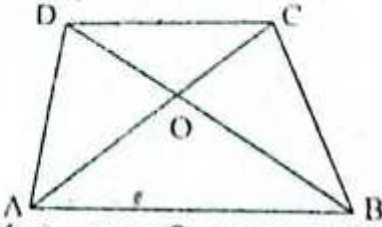
আবার, ΔNPL-এ OM ∥ PL

$\therefore PO : ON = LM : MN$ .... (ii) [একই কারণে]

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$PQ : QR = LM : MN$ (প্রমাণিত)

৩। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদ বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং এর কর্ণদ্বয় AC ও BD, O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, OA ঃ OC = OB ঃ OD

প্রমাণ : যেহেতু AB||DC এবং AC ছেদক।

$\therefore \angle BAC = \angle ACD$ [একান্তর কোণ বলে]

আবার AB||DC এবং BD তাদের ছেদক,

$\therefore \angle ABD = \angle BDC$ [একান্তর কোণ বলে]

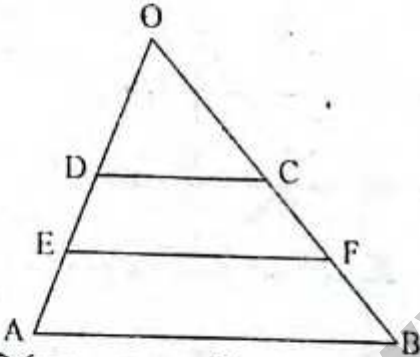
এখন, ΔAOB ও COD–এ,

$\angle OAB = \angle OCD$ এবং $\angle OBA = \angle ODC$

$\therefore \Delta AOB$ ও ΔCOD সদৃশ

সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হওয়ায়, OA ঃ OC = OB ঃ OD (প্রমাণিত)

৪। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, E ও F যথাক্রমে ABCD ট্রাপিজিয়ামে তির্যক বাহু AD ও BC–এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখাংশ AB ও DC –এর সমান্তরাল।

অঙ্কন : AD ও BC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করি যে বর্ধিত AD ও BC, O বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ : OAB ত্রিভুজে, DC||AB

$\therefore \frac{OD}{DA} = \frac{OC}{CB}$ [যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অণুপাতে বিভক্ত করে]

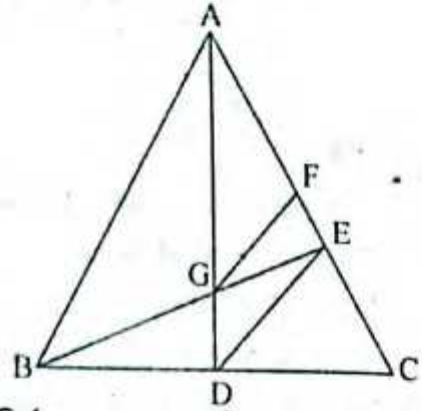
বা, $\frac{OD}{2DE} = \frac{OC}{2CF}$ [$\because$ E ও F যথাক্রমে AD ও BC–এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\frac{OD}{DE} = \frac{OC}{CF}$ [উভয়পক্ষকে ২ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ EF||DC কিন্তু DC||AB

$\therefore$ EF রেখাংশটি DC ও AB উভয় বাহুরই সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

৫। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = 6EF.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC–এর AD ও BE মধ্যমদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE–এর সমান্তরাল GF রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = 6EF.

প্রমাণ : ΔADE–এ GF||DE

$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{AF}{EF}$ [যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল রেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।]

অর্থাৎ $\frac{2GD}{GD} = \frac{AF}{EF}$ [$\because$ ত্রিভুজের মধ্যামত্রয় পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।]

বা, $\frac{2}{1} = \frac{AF}{EF}$

বা, $\frac{2+1}{1} = \frac{AF+EF}{EF}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{3}{1} = \frac{AF+EF}{EF}$

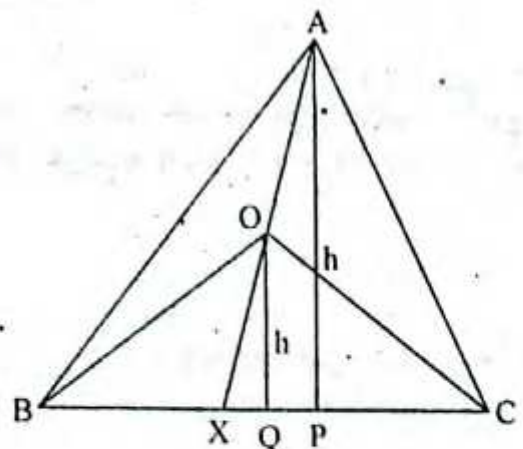
বা, $\frac{3}{1} = \frac{AE}{EF}$

বা, AE = 3EF

বা, $\frac{1}{2}AC = 3EF$ [$\because$ E, AC–এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ AC = 6EF (প্রমাণিত)

৬। ΔABC এর BC বাহুস্থ যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔAOB ঃ ΔAOC = BX ঃ XC.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC–এর BC বাহুর যে কোনো বিন্দু X এবং AX রেখায় O একটি বিন্দু। O,B ও O,C যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta AOB : \Delta AOC = BX : XC$.

অঙ্কন : A এবং O বিন্দু থেকে BC এর উপর যথাক্রমে AP ও OQ লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔABX এবং ΔACX–এর উচ্চতা AP

$\therefore \Delta ABX$–এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BX. AP$ .... (1)

এবং ΔACX এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot CX. AP$.............. (2)

আবার, ΔBOX ও ΔCOX–এর উচ্চতা OQ

$\therefore \Delta BOX$–এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BX. OQ$ .... (3)

এবং ΔCOX–এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot CX. OQ$ .... (4)

এখন, (1) – (3) করে পাই,

$\Delta ABX - \Delta BOX = \frac{1}{2} \cdot BX. AP - \frac{1}{2} BX. OQ$

$\therefore \Delta AOB = \frac{1}{2} BX (AP - OQ)$ .... (5)

আবার, (2) – (5) করে পাই,

$\Delta ACX - \Delta COX = \frac{1}{2} \cdot CX. AP - \frac{1}{2} \cdot CX. OQ$

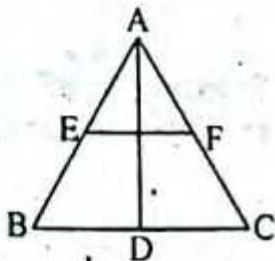
$\therefore \Delta AOC = \frac{1}{2} CX (AP - OQ)$ .... (6)

$\therefore$ 5 নং কে 6 নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BX. (AP - OQ)}{\frac{1}{2} \cdot CX (AP - OQ)}$$

$\therefore \Delta AOB : \Delta AOC = BX : XC$ (প্রমাণিত)

৭। ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD : DC = BE : CF

সমাধান :

দেওয়া আছে, ΔABC–এর $\angle A$–এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC–এর সমান্তরাল EF রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BE : CF.

প্রমাণ : ΔABC–এর AD, $\angle BAC$–এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

[যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে]

আবার, ΔABC–এ EF||BC [কল্পনা অনুসারে]

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$ [$\because$ ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{AE + BE}{BE} = \frac{AF + CF}{CF}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$

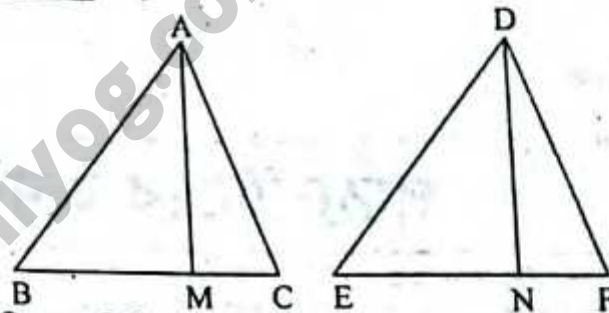
বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$ .... (ii) [একান্তরকরণ করে]

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{CF}$

অর্থাৎ BD : DC = BE : CF (প্রমাণিত)

৮। ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে, AM : DN = AB : DE.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী এবং উহাদের উচ্চতা যথাক্রমে AM ও DN অর্থাৎ AM ভূমি BC- এর ওপর এবং DN ভূমি EF–এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, AM : DN = AB : DE.

প্রমাণ : ΔABM ও ΔDEN–এ

$\angle AMB = \angle DNE = 90°$

[$\because$ AM, BC–এর উপর এবং DN, EF এর উপর লম্ব]

$\angle ABM = \angle DEN$ [ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী বলে $\angle B = \angle E$]

এবং অবশিষ্ট $\angle BAM$ = অবশিষ্ট $\angle EDN$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং এরা সদৃশ।

আবার, আমরা জানি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, উহাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AM}{DN}$

অর্থাৎ AM : DN = AB : DE (প্রমাণিত)

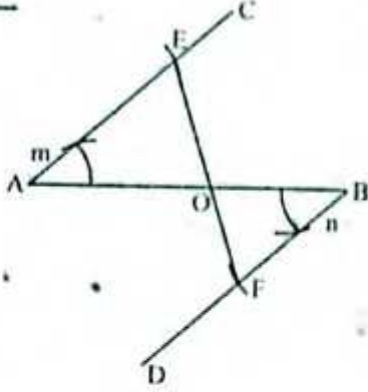
অনুশীলনী- ১৪.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ-:

১। বিকল্প পদ্ধতিতে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত কর। [পৃষ্ঠা-২৩৫]

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, m ও n দুইটি রেখাংশ এবং AB অন্য একটি রেখাংশ।

AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

১। A বিন্দুতে যেকোনো কোণ ∠BAC আঁকি।

২। B বিন্দুতে ∠BAC এর সমান করে ∠ABD আঁকি।

৩। AC হতে m এর সমান করে AE এবং BD হতে n এর সমান করে BF অংশ কেটে নিই।

৪। E ও F যোগ করি। EF, AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ O বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

প্রমাণ : ΔAOE ও ΔBOF এ ∠OAE = ∠OBF [অঙ্কনানুসারে]

এবং ∠AOE = ∠BOF [বিপ্রতীপ কোণ]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AE}{BF} = \frac{m}{n}$

∴ AB রেখাংশ O বিন্দুতে m : n অনুপাতে ভাগ হলো।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৪.২

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

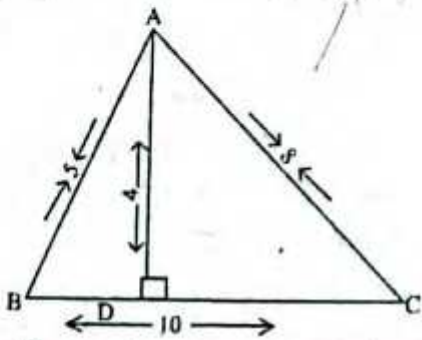
i) দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়।

ii) অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়।

iii) অনুপাত নির্ণয়ের ক্ষেত্রে রাশি দুটি একই জাতীয় হতে হয়।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ ii ও iii   (ক)

গ i ও iii   ঘ i, ii ও iii

ওপরের চিত্রের তথ্যানুসারে (২ ও ৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

২. ΔABC এর উচ্চতা ও ভূমির অনুপাত কত?

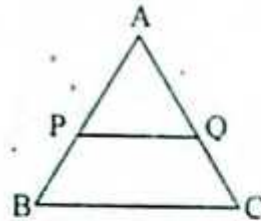
ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{4}{5}$ (গ)

গ $\frac{2}{5}$ ঘ $\frac{5}{4}$

৩. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক 6   খ 20   (খ)

গ 40   ঘ 50

৪. ΔABC-এ PQ||BC হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক AP:PB = AQ:QC   খ AB:PQ = AC:PQ   (ক)

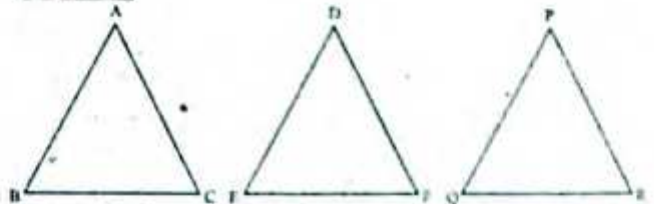
গ AB:AC = PQ:BC   ঘ PQ:BC = BP:BQ

৫. একটি বর্গের সর্বোচ্চ (মোট) কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

ক ১০টি   খ ৮টি   (ঘ)

গ ৬টি   ঘ ৪টি

৬। প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি অপর তৃতীয় একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF উভয়ই অপর তৃতীয় ত্রিভুজ ΔPQR এর সদৃশ। অর্থাৎ ΔABC ও ΔPQR-এ ∠A = ∠P, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R এবং ΔDEF ও ΔPQR-এ ∠D = ∠P, ∠E = ∠Q এবং ∠F = ∠R প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC ও ΔDEF পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔPQR–এ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ .... (i) [কল্পনা অনুসারে]

এবং ΔDEF ও ΔPQR–এ

$\angle D = \angle P$, $\angle E = \angle Q$ এবং $\angle F = \angle R$ .... (ii) [কল্পনা অনুসারে]

$\therefore$ (i) ও (ii) হতে পাই,

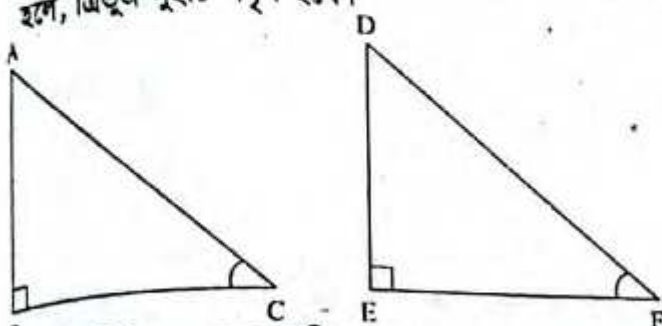
$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDEF সদৃশকোণী।

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDEF সদৃশ। (প্রমাণিত)

। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B$ ও $\angle E$ সমকোণ এবং সূক্ষ্মকোণ $\angle C$ = সূক্ষ্মকোণ $\angle F$. প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDEF–এ

$\angle B = \angle E$ [উভয়ই সমকোণ বলে]

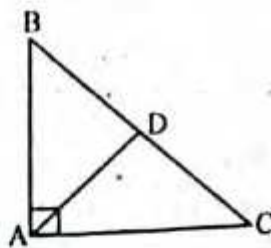
$\angle C = \angle F$ [কল্পনা অনুসারে]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle A$ = অবশিষ্ট $\angle D$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDEF সদৃশকোণী

অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ (প্রমাণিত)

। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌনিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌনিক শীর্ষ হতে অতিভুজের উপর লম্ব টানলে যে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় এরা পরস্পর সমান এবং মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী ΔABC–এ $\angle BAC$ = একসমকোণ। এটির অতিভুজ BC। শীর্ষ A হতে অতিভুজ BC এর উপর AD লম্ব টানি। ফলে দুইটি ত্রিভুজ ΔABD এবং ΔADC উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABD এবং ΔADC পরস্পর সমান এবং মূল ΔABC–এর সদৃশ।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔABD-এ

$\angle BAC = \angle ADB$ [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং $\angle ABC = \angle ABD$ [সাধারণ কোণ বলে]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACB$ = অবশিষ্ট $\angle BAD$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔABD পরস্পর সদৃশকোণী।

সুতরাং $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ .... (i) [$\because$ দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে উহারা পরস্পর সদৃশ হয়]

আবার, ΔABC ও ΔABD–এ

$\angle BAC$ ও $\angle ADC$ [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং $\angle ACB = \angle ACD$ [সাধারণ কোণ বলে]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ABC$ = অবশিষ্ট $\angle CAD$

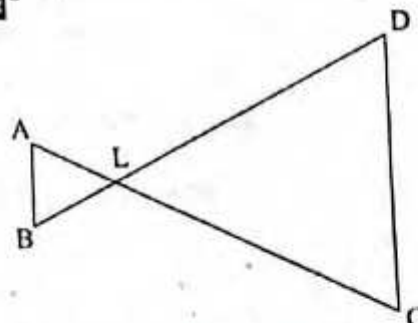
$\therefore \Delta ABC$ ও ΔACD পরস্পর সদৃশকোণী।

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ACD$ .... (ii) [$\because$ দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে উহারা পরস্পর সদৃশ হয়।]

সুতরাং (i) নং ও (ii) নং থেকে পাই,

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ACD$ পরস্পর সমান এবং মূল ABC–এর সদৃশ। (প্রমাণিত)

৯। পাশের চিত্রে $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$. প্রমাণ কর যে, $BD = 5BL$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : চিত্রে দেওয়া আছে, $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$ প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = 5BL$.

প্রমাণ : ΔABL এবং ΔCDL–এ

$\angle B = \angle D$ দেওয়া আছে,

$\therefore \angle ALB = \angle DLC$ (বিপ্রতীপ কোণ বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle BAL$ = অবশিষ্ট $\angle DCL$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{DC}{AB} = \frac{LD}{BL}$ [$\because$ সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

বা, $\frac{DC + AB}{AB} = \frac{LD + BL}{BL}$ [যোজন করে পাই]

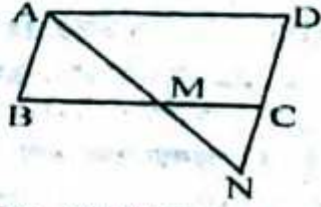
বা, $\frac{4AB + AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$ [$\because$ দেওয়া আছে $CD = 4AB$]

বা, $\frac{5AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$

বা, $5 = \frac{BD}{BL}$

$\therefore BD = 5BL$ (প্রমাণিত)

১০। ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহু বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM × DN একটি ধ্রুবক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত AN রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহুর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BM × DN একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ : $\triangle ABM$ ও $\triangle ADN$ –এর মধ্যে $\angle BAM = \angle AND$ [একান্তর কোণ বলে]

$\angle ABM = \angle ADN$ [সামান্তরিকের বিপরীত কোণ বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle AMB$ = অবশিষ্ট $\angle DAN$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং তারা সদৃশ।

∴ তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

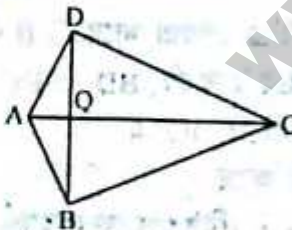
$\therefore \frac{BM}{AD} = \frac{AB}{DN}$

বা, $BM \times DN = AB \times AD$

কিন্তু AB ও AD, ABCD সামান্তরিকের সন্নিহিত দুটি বাহু। সুতরাং AB ও AD নির্দিষ্ট এবং তাদের গুণফলও নির্দিষ্ট অর্থাৎ ধ্রুবক।

অর্থাৎ BM × DN একটি ধ্রুবক (প্রমাণিত)

১১। পাশের চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BA = 2AQ = \frac{1}{2}QC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AD \perp DC$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : প্রদত্ত চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $DA \perp DC$.

প্রমাণ : যেহেতু $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$

সুতরাং $QC = 2DQ = 2.2AQ = 4AQ$

আবার, $AC = AQ + QC$

$= AQ + 4AQ$ [∴ $QC = 4AQ$]

$= 5AQ$

এখন ADQ সমকোণী ত্রিভুজ–এ

$AD^2 = AQ^2 + DQ^2$

$= AQ^2 + (2AQ)^2$ [∴ $DQ = 2AQ$]

$= AQ^2 + 4AQ^2$

$= 5AQ^2$ .... (i)

এবং CDQ সমকোণী ত্রিভুজ–এ

$CD^2 = QC^2 + DQ^2$

$= (4AQ)^2 + (2AQ)^2$

$= 16AQ^2 + 4AQ^2$

$= 20AQ^2$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$AD^2 + CD^2 = 5AQ^2 + 20AQ^2$

$= 25AQ$

$= (5AQ)^2$ [∵ $AC = 5AQ$]

$= (AC)^2$

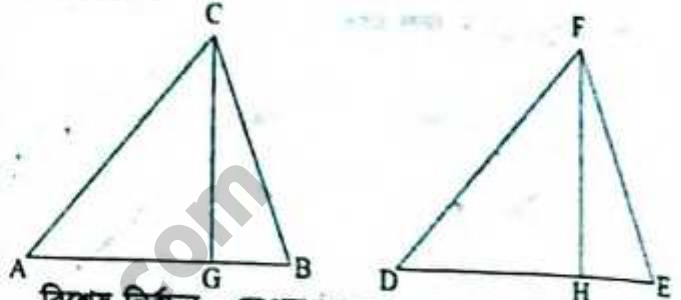
$= AC^2$

∴ $AD^2 + CD^2 = AC^2$

∴ $AD \perp DC$ (পীথাগোরাসের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী)

(প্রমাণিত)

১২। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\angle A = \angle D$. প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$–এ $\angle A = \angle D$, প্রমাণ করতে হবে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$.

অঙ্কন : C ও F থেকে AB এর DE এর উপর যথাক্রমে CG ও FH লম্ব আঁকি। তাহলে, CG ও FH হবে ত্রিভুজ দুটির উচ্চতা।

প্রমাণ : $\triangle ACG$ ও $\triangle DFH$–এ $\angle A = \angle D$ [দেওয়া আছে]

এবং $\angle AGC = \angle DHF$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

অবশিষ্ট $\angle ACG$ = অবশিষ্ট $\angle DFH$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং তারা সদৃশ।

$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{CG}{FH}$

এখন $\triangle$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}AB.CG$ এবং $\triangle$ ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}DE.FH$

[∵ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা]

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}AB.CG}{\frac{1}{2}DE.FH}$

$= \frac{AB.CG}{DE.FH}$

$= \frac{AB.AC}{DE.DF}$ [∵ $\frac{CG}{FH} = \frac{AC}{DF}$]

∴ $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$ (প্রমাণিত)

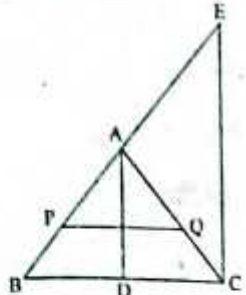
১৩। ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ) প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC

গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ.

সমাধান :

ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি হলো–

খ) প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC.

প্রমাণ : ΔBAD ও ΔCAD–এর সাধারণ বাহু AD যা ΔABC–এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক। তাহলে, $\angle BAD = \angle CAD$ এবং $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

অবশিষ্ট $\angle ABD =$ অবশিষ্ট $\angle ACD$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং এরা প্রমাণ হলে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

$\therefore \frac{BA}{BO} = \frac{AC}{DC}$

বা, $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$

বা, BA ঃ AC = BD ঃ DC

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AC (প্রমাণিত)

গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = BP ঃ CQ.

প্রমাণ : ΔABC–এর AD, $\angle BAC$–এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন PQ||BC (কল্পনা)]

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

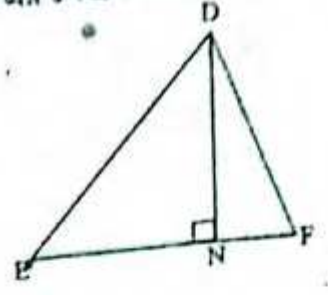
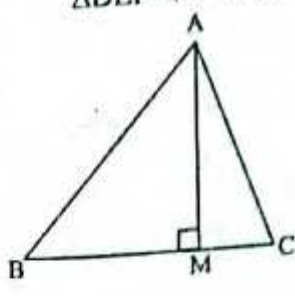
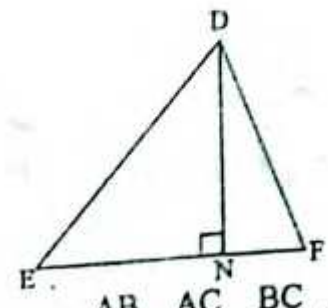
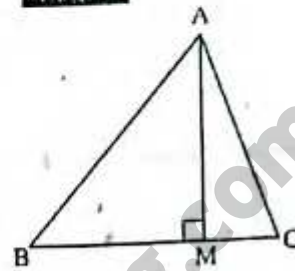
$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$

$\therefore$ BD ঃ DC = BP ঃ CQ (প্রমাণিত)

১৪। চিত্রে, ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

ক) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

গ) BC = 3 সে.মি., EF = 8 সে.মি., $\angle B = 60°$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং ΔABC = 3 বর্গ সে.মি. হয়, তবে ΔDEF অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু হলো, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ এবং অনুরূপ কোণগুলো হলো, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

খ) প্রমাণ : $\Delta ABC = \frac{1}{2} BC.\ AM$ এবং $\Delta DEF = \frac{1}{2} EF.DN$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC.AM}{\frac{1}{2} EF.DN} = \frac{BC.AM}{EF.DN} = \frac{AM}{DN} \times \frac{BC}{EF}$

আবার, ΔABM ও ΔDEN এর মধ্যে $\angle B = \angle E$

$\angle AMB = \angle DNE$ = এক সমকোণ।

$\therefore \angle BAM = \angle EDN$

সুতরাং ΔABM ও ΔDEN সদৃশকোণী, তাই এরা সদৃশ।

এখন, $\frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [কারণ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ]

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AM}{DN} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$

একই ভাবে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$

অতএব, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$ (প্রমাণিত)

গ) দেওয়া আছে,

BC = 3 সে.মি.

এবং $\frac{BC}{AB} = 3/2$

বা, $\frac{3}{AB} = \frac{3}{2}$ [$\because$ BC = 3 সে.মি.]

$\therefore$ AB = 2 সে.মি.

যেহেতু, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{EF}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

বা, $\frac{3}{2} = \frac{DE}{8}$

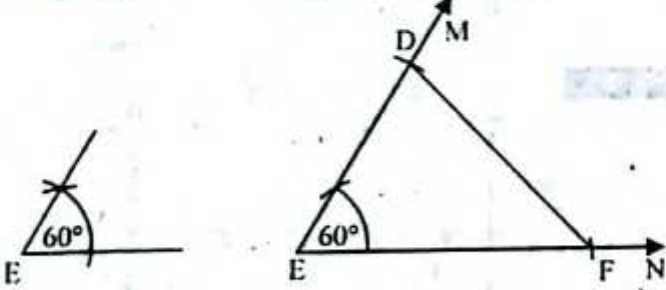
বা, $3DE = 16$

$\therefore DE = \frac{16}{3}$ সে.মি.

$= 5.33$ সে.মি.

বা, $DE = \frac{16}{3} = 5.33$ সে.মি.

ΔDEF এর, DE = 5.33 সে.মি., EF = 8 সে.মি.

∠B = ∠E = 60° ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

ΔDEF আঁকা হলো যার ∠E = 60°, EF = 8 সে.মি.
এবং DE = 5.33 সে.মি.।

ΔDEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{3^2}{8^2}$

[দেওয়া আছে, BC = 3 সে.মি. এবং EF = 8 সে.মি.]

বা, $\frac{3}{\Delta DEF} = \frac{9}{64}$

বা, $\frac{1}{\Delta DEF} = \frac{3}{64}$

বা, $3\Delta DEF = 64$

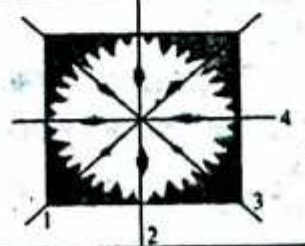
বা, $\Delta DEF = \frac{64}{3}$ বর্গ সে.মি.

$\therefore \Delta DEF = 21\frac{1}{3}$ বর্গ সে.মি.

অনুশীলনী- ১৪.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : তুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত করা হলো। এর চারটি প্রতিসম রেখা রয়েছে? [পৃষ্ঠা–২৩৮]

সমাধান : তুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। পাশের চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত করা হলো। এর চারটি প্রতিসম রেখা রয়েছে।

কাজ–২: ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত কর। [পৃষ্ঠা–২৩৮]

সমাধান :

বর্ণ	A	B	C	D	H	I	K	M	O	U	V	W	X
প্রতিসাম্য রেখা	A	B	C	D	H	I	K	M	O	U	V	W	X

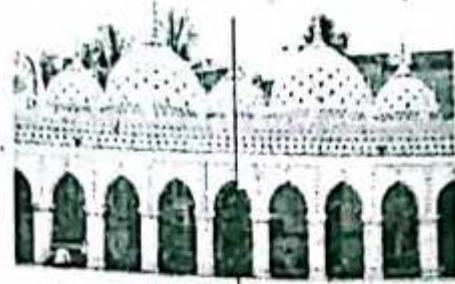
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৪.৩

১। নিচের চিত্রসমূহের কোনটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?
(ক) বাড়ির চিত্র (খ) মসজিদের চিত্র (গ) মন্দিরের চিত্র (ঘ) গীর্জার চিত্র (ঙ) প্যাগোডার চিত্র (চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র (ছ) মুখোশের চিত্র (জ) তাজমহলের চিত্র

সমাধান :

ক) বাড়ির চিত্র

প্রতিসাম্য রেখা নেই

খ) মসজিদের চিত্র

প্রতিসাম্য রেখা আছে

গ) মন্দিরের চিত্র

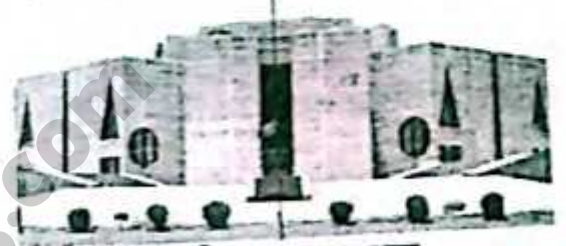
প্রতিসাম্য রেখা আছে

ঘ) গির্জার চিত্র

প্রতিসাম্য রেখা আছে

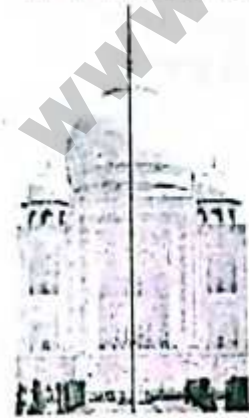
ঙ) প্যাগোডার চিত্র

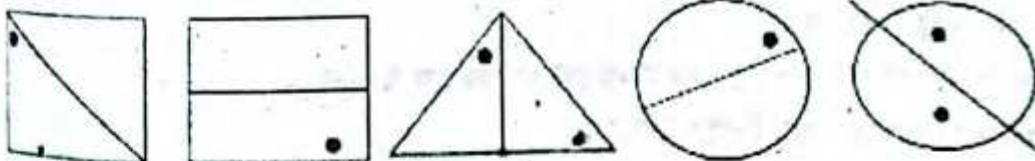
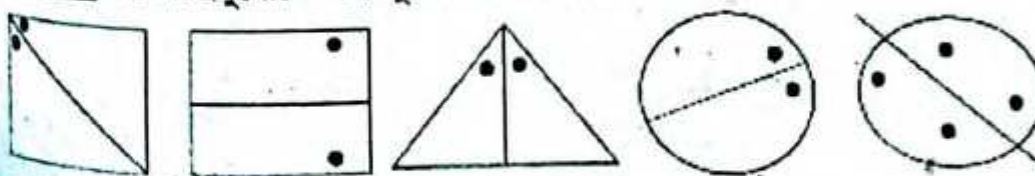
প্রতিসাম্য রেখা আছে

চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র

প্রতিসাম্য রেখা আছে

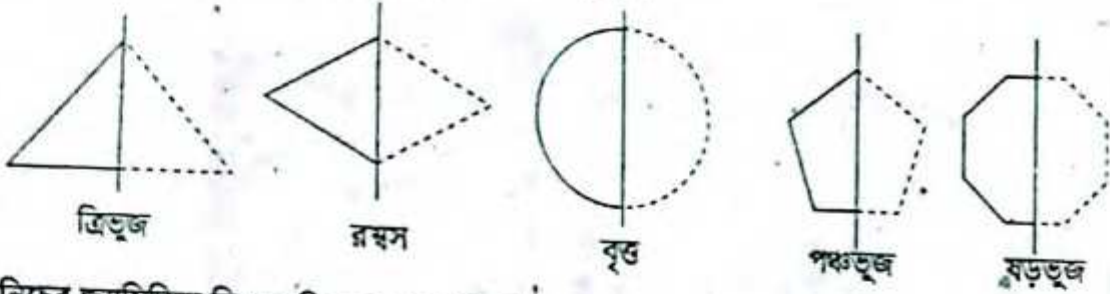
ছ) মুখোশের চিত্র

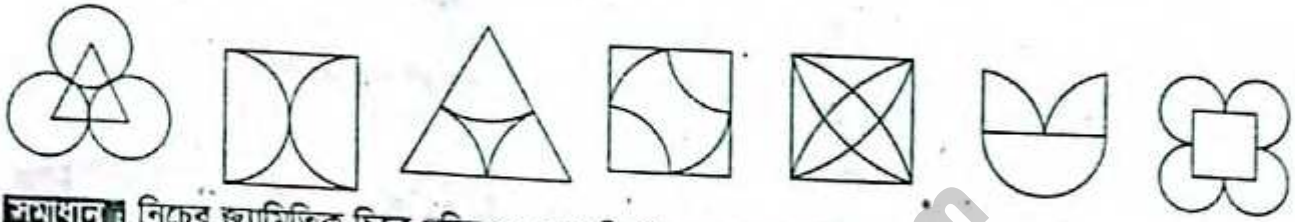
প্রতিসাম্য রেখা আছে

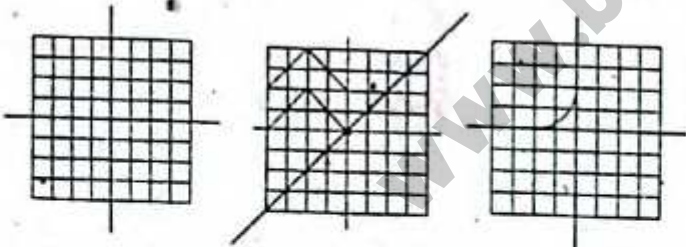
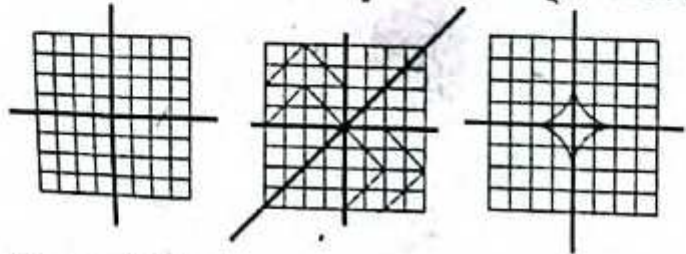
জ) তাজমহলের চিত্র

প্রতিসাম্য রেখা আছে

২। প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে, অন্য ফুটকি প্রদর্শন কর :

সমাধান : নিচে চিত্রগুলোতে অন্য ফুটকি প্রদর্শন করা হলো :

প্রতিসাম্য রেখা আছে

৩। প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর এবং শনাক্ত কর।

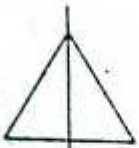
সমাধান: জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ করে দেখানো হলো :

ত্রিভুজ রম্বস বৃত্ত পঞ্চভুজ ষড়ভুজ

৪। নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ কর :

সমাধান: নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ করে দেখানো হলো :

৫। নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর যেন আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম হয় :

সমাধান: নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ করে দেখানো হলো :

৬। নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় কর :

ক) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ খ) বিষমবাহু ত্রিভুজ গ) বর্গক্ষেত্র ঘ) রম্বস ঙ) সুষম ষড়ভুজ চ) পঞ্চভুজ ছ) বৃত্ত

সমাধান: নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় করা হলো :

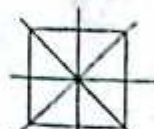
(ক) প্রতিসাম্য রেখা 1টি

(খ) প্রতিসাম্য রেখা নেই

(গ) প্রতিসাম্য রেখা 4টি

ঘ) প্রতিসাম্য রেখা 2টি

(ঙ)

প্রতিসাম্য রেখা 6টি

(চ)

প্রতিসাম্য রেখা 5টি

(ছ)

প্রতিসাম্য রেখা অসংখ্য

। ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের

ক) অনুভূমিক আয়না

খ) উল্লম্ব আয়না

গ) অনুভূমিক ও উল্লম্ব উভয় আয়না

সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো আঁক।

সমাধান :

ইংরেজি বর্ণমালা	(ক) অনুভূমিক আয়না	(খ) উল্লম্ব আয়না	(গ) অনুভূমিক ও উল্লম্ব আয়না
A	×	√	×
B	√	×	×
C	√	×	×
D	√	×	×
H	√	√	√
I	√	√	√
K	√	×	×
M	×	√	×
O	√	√	√
V	×	√	×
U	×	√	×
W	×	√	×
X	√	√	√

৮। প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র নিচে অঙ্কন করা হলো :

অনুশীলনী- ১৪.৪

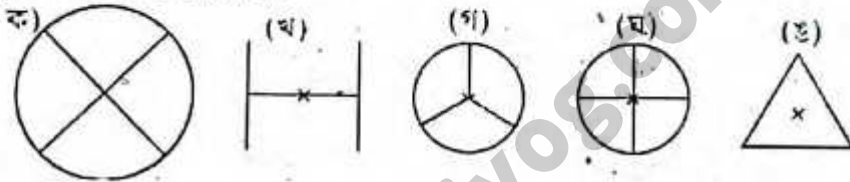
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ–১: তোমার চারপাশের পরিবেশ থেকে 5টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দাও যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। [পৃষ্ঠা–২৪০]

সমাধান : আমার চারপাশের পরিবেশ থেকে 5টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দেওয়া হলো : যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। যেমন : ১। বৈদ্যুতিক পাখা, ২। ঘড়ির কাঁটা, ৩। প্রিজম, ৪। বই ও ৫। দরজা।

২। নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।

সমাধান : চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :

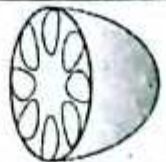
(ক) 4; (খ) 2; (গ) 3; (ঘ) 4; (ঙ) 3

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান ১৪.৪

১। নিচের চিত্রসমূহের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর :

(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ) (চ)

সমাধান : চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :

(ক) 4; (খ) 5; (গ) 6; (ঘ) 3; (ঙ) 4; (চ) 3;

২। একটি লেবু আড়াআড়ি কেটে চিত্রের ন্যায় আকার পাওয়া গেল। সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।

সমাধান : সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :

৫। শূন্যস্থান পূরণ কর :

সমাধান :

চিত্র	ঘূর্ণন কেন্দ্র	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ
বর্গ	কর্ণের ছেদবিন্দু	4	90°
আয়ত	কর্ণের ছেদবিন্দু	2	180°
রম্বস	কর্ণের ছেদবিন্দু	2	180°
সমবাহু ত্রিভুজ	মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু	3	120°
অর্ধবৃত্ত	কেন্দ্র	1	360°
সুষম পঞ্চভুজ	ভরকেন্দ্র	5	72°

৬। যে সকল চতুর্ভুজের রেখা প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে, তাদের তালিকা কর।

সমাধান :

চিত্র	রেখা প্রতিসম	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
বর্গ	হ্যাঁ	4
রম্বস	হ্যাঁ	2
আয়ত	হ্যাঁ	2

৭। 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে কি? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান : 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে। কোনো যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমাণ কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ। কোনো চিত্র একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে যতবার তার আদি অবস্থানে ফিরে আসে ঐ চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা ততো। কোনো চিত্রের একাবর পূর্ণ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 360°। সুতরাং 360° কে ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা দ্বারা ভাগ করলে ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ বা ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ পাওয়া যাবে।

20 মাত্রার সুষম বহুভুজের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 20। অর্থাৎ, একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের জন্য বহুভজটি 20 বার তার আদি অবস্থানে ফিরে আসে। সুতরাং সুষম বহুভুজটির ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ $360° \div 20 = 18°$.

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. ABC ত্রিভুজটিকে EF রেখা বরাবর ভাঁজ করলে তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায়। EF রেখাটি কী?
ক পরিধি খ প্রতিসাম্য রেখা গ ত্রিভুজের বাহু ঘ অতিভুজ (খ)

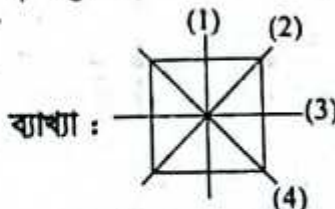
২. নিচের কোনটি প্রতিসম?
ক বিষমবাহু ত্রিভুজ খ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গ সুষম বহুভুজ ঘ যে কোনো চতুর্ভুজ (গ)

৩. নিচের কোনটির প্রতিসমতা নেই?
ক A খ B গ S ঘ D (গ)

৪. সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?
ক ১ খ ২ গ ৩ ঘ ৪ (গ)

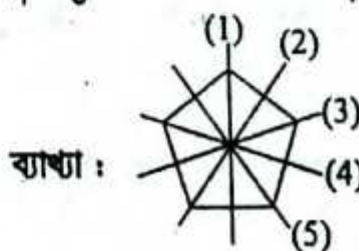
ব্যাখ্যা : (1) (2) (3)

৫. একটি বর্গক্ষেত্রের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?
ক ১ খ ২ গ ৩ ঘ ৪ (ঘ)

ব্যাখ্যা : (1) (2) (3) (4)

৬. একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?
ক ৪ খ ৫ গ ৬ ঘ ৭ (খ)

ব্যাখ্যা : (1) (2) (3) (4) (5)

৭. সুষম ষড়ভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?
ক ৪ খ ৫ গ ৬ ঘ ৭ (গ)

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা —

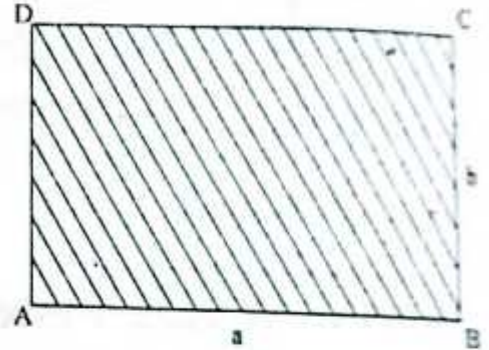
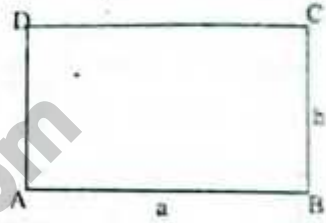
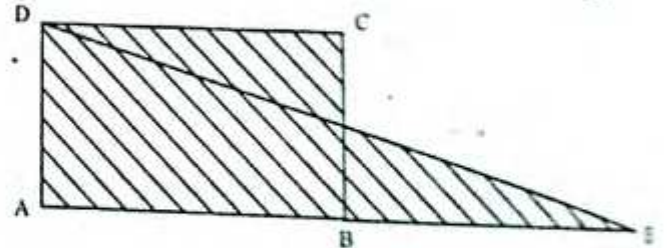
- বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজ ক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- বিভিন্ন প্রকার জ্যামিতিক কারিগরি চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গসেন্টিমিটার।

আমরা জানি,

ক) ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য AB = a একক (যথা, মিটার), প্রস্থ BC = b একক (যথা, মিটার) হলে, ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ab বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার।)

খ) ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক (যথা, মিটার) হলে, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)।

দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে তাদের মধ্যে '=' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AED ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। উল্লেখ্য যে, ΔABC ও ΔDEF সর্বসম হলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে অবশ্যই ΔABC এর ক্ষেত্রফল = ΔDEF এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না।

যেমন, চিত্রে $\Delta ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = ΔDBC এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু ΔABC ও ΔDBC সর্বসম নয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক 3 cm, 4 cm, 5 cm   খ 6 cm, 8 cm, 10 cm
গ 5 cm, 7 cm, 9 cm   ঘ 5 cm, 12 cm, 13 cm

ⓚ ⓚ ● ⓖ

২. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii   খ i ও iii
গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

ⓚ ⓚ ⓖ ●

নিচের চিত্রে, ΔABC সমবাহু $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$ তথ্যের ভিত্তিতে (৩ ও ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩. BD = কত?

ক 1   খ $\sqrt{2}$
গ 2   ঘ 4

● ⓚ ⓖ ⓖ

৪. ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক $\frac{4}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক   খ $\sqrt{3}$ বর্গ একক
গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক   ঘ $2\sqrt{3}$ বর্গ একক

ⓚ ● ⓖ ⓖ

৫। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD সামান্তরিক। তার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD.

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং AO = OC এবং BO = OD. [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

এখন, ΔABC-এর মধ্যমা BO   [$\because$ AO = OC]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC .... (i)

এবং ΔBCD-এর মধ্যমা CO   [$\because$ BO = OD]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD .... (ii)

আবার, Δ CAD এর মধ্যমা DO   [$\because$ AO = OC]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD .... (iii)

(i) নং (ii) নং এবং (iii) নং হতে পাই,

Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র AOD = ΔCOD (প্রমাণিত)

৬। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$.

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle B$ = এক সমকোণ

[যেহেতু বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ একসমকোণ]

$\therefore$ ΔABC সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ [বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান]

বা, $2AB^2 = AC^2$.   [$\because$ BC = AB]

$\therefore AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$ (প্রমাণিত)

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি Δ ABC এর মধ্যমা AD। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD।

অঙ্কন : BC বাহুর ওপর A বিন্দু হতে AE লম্ব অংকন করি।

প্রমাণ : A বিন্দু হতে BC বাহুর উপর AD মধ্যমা [কল্পনানুসারে]

∴ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

অর্থাৎ BD = CD .... (i)

এখন, Δ ABD এবং ΔACD এর ভূমি যথাক্রমে BD এবং CD কল্পনা করলে, AE উভয় ত্রিভুজের উচ্চতা হবে।

আমরা জানি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$$\therefore \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times AE}{\frac{1}{2} \times CD \times AE}$$

বা, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{BD}{CD}$

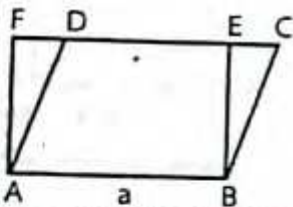
বা, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{CD}{CD}$ [∴ (i) নং হতে BD = CD]

বা, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = 1$

∴ ΔABD = ΔACD [আড়গুণন করে]

অর্থাৎ Δ-ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD. (প্রমাণিত)

৮। একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিকের পরিসীমা > আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা।

প্রমাণ : সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হওয়ায়, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্র ও ABEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি AB-এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল AB ও CF-এর মধ্যে অবস্থিত। আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

সুতরাং, BCE সমকোণী ত্রিভুজ। BC, BCE সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হওয়ায় BC > BE.

এখন, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (AB + BE)
= 2 AB + 2 BE

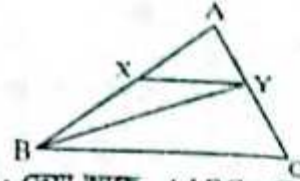
এবং সামান্তরিকের পরিসীমা = 2 (AB + BC)
= 2 AB + 2 BC

যেহেতু BC > BE

∴ 2 AB + 2 BC > 2AB + 2BE

অর্থাৎ, সামান্তরিকের পরিসীমা > আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা। (প্রমাণিত)

৯। ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল).

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ΔABC-এর AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। X,Y যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC).

অঙ্কন : B,Y যোগ করি।

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

∴ ΔABC-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু Y.

BY মধ্যমা

∴ Δ ক্ষেত্র ABY $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) .... (ii)

আবার, Δ ABY-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু X

∴ XY মধ্যমা

∴ Δ ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABY)

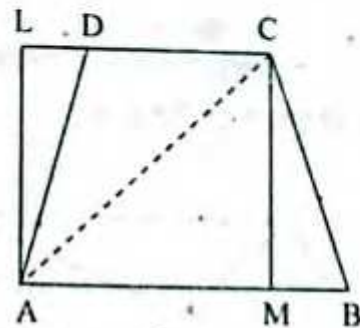
বা, Δ-ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}$ {$\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)} [(i) এর সাহায্যে]

∴ Δ ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC). (প্রমাণিত)

১০। চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

L D C

A M B

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন : A থেকে বর্ধিত CD এর উপর AL এবং C থেকে AB-এর উপর CM লম্ব টানি। A ও C যোগ করি।

ক্ষেত্রফল নির্ণয় : ট্রাপিজিয়াম ABCD, AC দ্বারা Δ ক্ষেত্র ACD এবং Δ ক্ষেত্র ABC এ বিভক্ত হয়েছে।

CM লম্ব হওয়ায় Δ ক্ষেত্র ABC এর ভূমি AB এবং CM উচ্চতা।

Δ ক্ষেত্র ACD-এর ভূমি CD এবং উচ্চতা AL, একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হওয়ায় CM = AL এখন,

Δ ক্ষেত্র ABC $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} AB \times CM$

Δ ক্ষেত্র ACD $= \frac{1}{2} \times CD \times AL$

$= \frac{1}{2} \times CD \times CM$ [$\because AL = CM$]

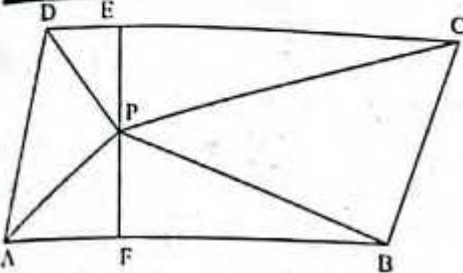
সুতরাং, ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} AB \times CM + \frac{1}{2} CD \times CM$

$= \frac{1}{2}(AB + CD) \times CM$

$= \frac{1}{2} \times$ (সমান্তরাল বাহু দুটির যোগফল) $\times$ উচ্চতা

১১। সামান্তরিক ABCD-এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক, P এর অভ্যন্তরে যে কোনো একটি বিন্দু। P, A; P, B; P, C; P, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD).

অঙ্কন : P বিন্দু হতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PF ও PE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ভূমি AB ও উচ্চতা EF হওয়ায় ABCD সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল = AB × EF .... (i)

Δ PAB-এর ভূমি AB ও উচ্চতা PF

Δ ক্ষেত্র PAB $= \frac{1}{2}(AB \times PF)$ .... (ii)

এবং Δ PCD এর ভূমি CD ও PE উচ্চতা হওয়ায়,

Δ-ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2} \times (CD \times PE)$

$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2} \times (AB \times PE)$ .... (iii)

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে AB = CD]

এখন, (ii) নং এবং (iii) নং যোগ করে পাই,

Δ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}(AB \times PF) + \frac{1}{2}(AB \times PE)$

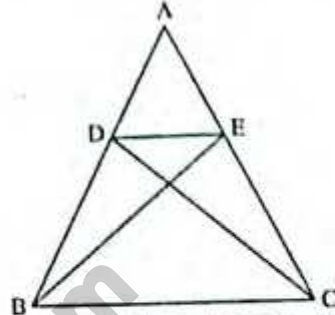
$= \frac{1}{2} AB (PF + PE)$

$= \frac{1}{2} \times (AB \times EF)$

$= \frac{1}{2} \times$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD) [(i) নং এর সাহায্যে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD). (প্রমাণিত)

১২। ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র DBE = Δ ক্ষেত্র CDE.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC-এর ভূমি BC এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE.

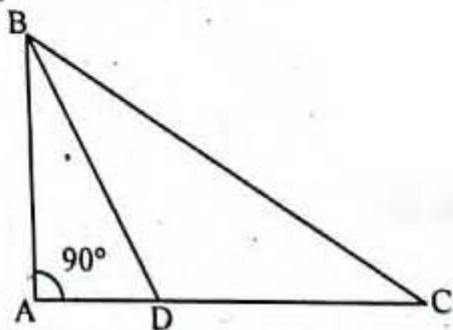
প্রমাণ : ΔDBC ও ΔEBC একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC

আবার ΔBDE ও ΔCDE একই ভূমি DE এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল DE ও BC এর মধ্যে অবস্থিত।

অতএব, Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE. (প্রমাণিত)

১৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপর একটি বিন্দু। B, D যোগ করা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

প্রমাণ : ΔABC এ, $\angle A$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ BC অতিভুজ

সুতরাং $AC^2 + AB^2 = BC^2$ .... (i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এ, BD অতিভুজ।

$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$

বা, $AB^2 = BD^2 - AD^2$ .... (ii)

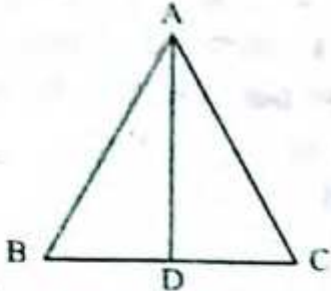
এখন, (ii) থেকে AB^2 এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$AC^2 + BD^2 - AD^2 = BC^2$

বা, $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$

$\therefore BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ (প্রমাণিত)

১৪। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে $4AD^2 = 3AB^2$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC–এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

প্রমাণ : ABC সমবাহু ত্রিভুজে AD, BC–এর উপর লম্ব

$\therefore BD = CD$

অর্থাৎ $BD = \frac{1}{2} BC$ .... (i)

এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ

$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = AB^2$ [(i) নং এর সাহায্যে]

বা, $AD^2 + \frac{BC^2}{4} = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

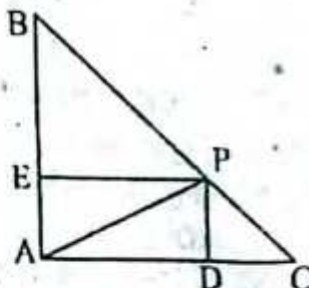
বা, $AD^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4}$ [$\because AB = BC = CA$]

বা, $AD^2 = \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$

বা, $AD^2 = \frac{3AB^2}{4}$

$\therefore 4AD^2 = 3AB^2$ (প্রমাণিত)

১৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। এর AB = AC এবং BC অতিভুজ। P, BC–এর উপর যে কোনো বিন্দু। P, A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

অঙ্কন : P থেকে AB–এর উপর PE এবং AC–এর উপর PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC–এর $\angle A = 90°$ এবং AB = AC হওয়ায়, $\angle B = \angle C = 45°$

এখন, ΔPDC–এর $\angle D = 90°$ [$\because PD \perp AC$]

সুতরাং $\angle DPC = \angle DCP = 45°$

$\therefore PD = CD$

একই কারণে, PBE সমকোণী ত্রিভুজে PE = BE

এখন, PDC সমকোণী ত্রিভুজে, PC অতিভুজ হওয়ায়

$PC^2 = PD^2 + CD^2$

$= PD^2 + PD^2$ [$\because PD = CD$]

$\therefore PC^2 = 2PD^2$ .... (i)

আবার, PBE সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,

$PB^2 = BE^2 + PE^2$

$= PE^2 + PE^2$ [$\because BE = PE$]

$\therefore PB^2 = 2PE^2$ .... (ii)

এখন, (i) এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2$

$= 2(PD^2 + PE^2)$

আবার, $\angle E = \angle A = \angle D =$ এক সমকোণ হওয়ায় ADPE একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore PE = AD$

$\therefore PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2)$ .... (iii)

ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

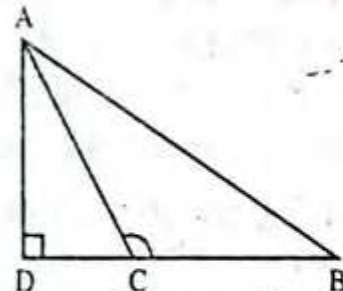
$PA^2 = PD^2 + AD^2$ .... (iv)

এখন, (iii) নং সমীকরণে (iv) নং এর মান বসিয়ে পাই,

$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$

$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$. (প্রমাণিত)

১৬। ΔBAC এর $\angle C$ স্থূলকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ত্রিভুজে $\angle C$ স্থূলকোণ। AD.BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব অর্থাৎ $\angle ADB = 90°$। দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

প্রমাণ : ΔACD এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AC.

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AD^2 + CD^2$ .... (i)

আবার, ΔABD এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AB.

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]

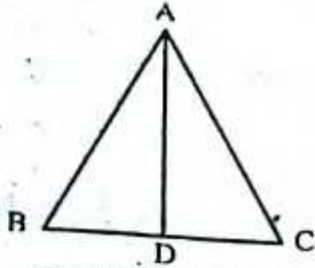
$= AD^2 + BC^2 + 2BC.CD + CD^2$

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]

সুতরাং $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (দেখানো হলো)

১৭। ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.

প্রমাণ : AD লম্ব হওয়ায় ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং AB অতিভুজ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC - CD)^2$ $\quad [\because BD = BC - CD]$

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$ .... (i)

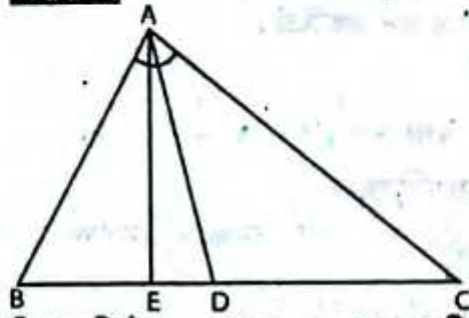
আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ।

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$

এখন সমীকরণ (i) এ $AD^2 + CD^2 = AC^2$ বসিয়ে পাই,

$AB^2 = AC^2 + AD^2 - 2BC.CD$ (প্রমাণিত)

১৮। ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন : A বিন্দু হতে BC–এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : যেহেতু ΔADC–এর $\angle ADB$ = সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.DE$ .... (ii)

[AD, BC–এর উপর মধ্যমা বলে, BD = CD]

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.DE + AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$

$= 2AD^2 + 2BD^2$

$= 2(BD^2 + AD^2)$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ (প্রমাণিত)

সৃজনশীল অংশ

মাস্টার ট্রেইনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার হতে কোন উপপাদ্যটি বর্ণিত হয়েছে? [জয়পাড়া পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]
ক টলেমির খ ব্রহ্মগুপ্তের
গ অ্যাপোলোনিয়াসের ঘ নিউটনের
উত্তর: ক

২. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 208 বর্গমিটার। এর প্রস্থ 13 মিটার হলে দৈর্ঘ্য কত মিটার?
ক 10 খ 15
গ 16 ঘ 30
উত্তর: গ

[ব্যাখ্যা : আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ; দৈর্ঘ্য $= \frac{208}{13} = 16$ মিটার]

৩. বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 16 সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ক 100 খ 156
গ 236 ঘ 256
উত্তর: ঘ

৪. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা 36 মিটার হলে এর বাহুর দৈর্ঘ্য কত মিটার?
ক 6 খ 9
গ 9.5 ঘ 10
উত্তর: খ

[ব্যাখ্যা : বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{36}{4} = 9$ মি.]

৫. বর্গের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার যখন পরিসীমা 20 মিটার?
ক 36 খ 25
গ 16 ঘ 9
উত্তর: খ

[ব্যাখ্যা : বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{20}{4} = 5$ মিটার
সুতরাং বর্গের ক্ষেত্রফল $= (5)^2 = 25$ বর্গমিটার।]

৬. ত্রিভুজের ভূমি $\frac{2}{3}$ মিটার ও উচ্চতা 3 মিটার হলে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?
ক 1 খ 2
গ 3 ঘ 9
উত্তর: ক

[ব্যাখ্যা : ত্রিভুজের ভূমি $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 3 = 1$ বর্গমিটার।]

৭. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার এবং এর উচ্চতা 6 মিটার হলে ভূমি কত মিটার হবে?
ক 2 খ 4
গ 8 ঘ 12
উত্তর: গ

[ব্যাখ্যা : $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times 6 = 24$ ভূমি $= \frac{2 \times 24}{6} = 8$ মিটার।]

৮. নিচের কোন বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য হলে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাবে?
ক 4, 3 ও 5 খ 4, 5 ও 7
গ 6, 7 ও 9 ঘ 6, 8 ও 9
উত্তর: ক

[ব্যাখ্যা : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = (10)^2$]

পরিমিতি

☐ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘণবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সুষম ও অসম আকারের বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

ব্যবহারিক প্রয়োজনে, রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসাবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ = $\dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$।

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসাবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।

☐ অনুশীলনী– ১৬.১

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ– ৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সে.মি. হলে, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি b = 60 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি.।

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$

বা, $\frac{60}{4}\sqrt{4a^2 - (60)^2} = 1200$

বা, $15\sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$

বা, $\sqrt{4a^2 - 3600} = 80$

বা, $4a^2 - 3600 = 6400$ [বর্গ করে]

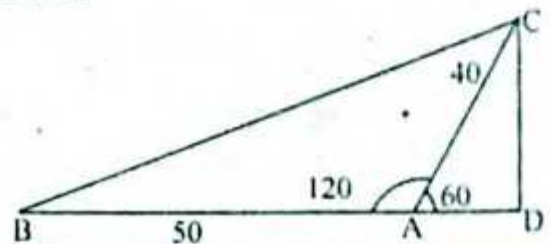
বা, $4a^2 = 10000$

বা, $a^2 = 2500$

∴ $a = 50$ [বর্গমূল করে]

∴ ত্রিভুজটির সমান সামন বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সে.মি.

উদাহরণ– ৬। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুটি রাস্তা 120° কোণে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। 5 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, A স্থান থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে রওনা হয়ে 5 ঘণ্টার পর B ও C স্থানে পৌঁছাল। তাহলে, 5 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হয় BC.

C থেকে BA এর বর্ধিতাংশের ওপর CD লম্ব টানি।

∴ AB = 5 × 10 কিলোমিটার = 50 কিলোমিটার,

AC = 5 × 8 কিলোমিটার = 40 কিলোমিটার

এবং $\angle BAC = 120°$

$\therefore \angle DAC = 180° - 120° = 60°$

ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ

$\therefore \frac{CD}{AC} = \sin 60°$

বা, $CD = AC \sin 60° = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

এবং $\frac{AD}{AC} = \cos 60°$

বা, $AD = AC \cos 60°$

$= 40 \times \frac{1}{2} = 20$

আবার, ΔBCD সমকোণী থেকে পাই,

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$= (BA + AD)^2 + CD^2$

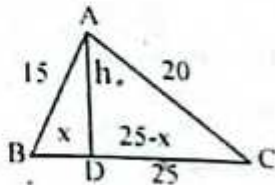
$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2$

$= 4900 + 1200 = 6100$

$\therefore BC = 78.1$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব 78.1 কিলোমিটার (প্রায়)

উদাহরণ-৭॥ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25 একক, 20 একক ও 15 একক। বৃহত্তর বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC = 25 একক

AC = 20 একক, AB = 15 একক

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে ΔABD ও ΔACD ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ধরি, BD = x একক এবং AD = h একক

$\therefore CD = BC - BD = (25 - x)$ একক

ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $x^2 + h^2 = (15)^2$

$\therefore x^2 + h^2 = 225$ .... (i)

এবং ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $CD^2 + AD^2 = AC^2$

বা, $(25 - x)^2 + h^2 = (20)^2$

বা, $625 - 50x + x^2 + h^2 = 400$

বা, $625 - 50x + 225 = 400$

সমীকরণ (i) এর সাহায্যে

বা, $50x = 450$

$\therefore x = 9$

সমীকরণ (i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$81 + h^2 = 225$

বা, $h^2 = 144$

$\therefore h = 12$

Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ BD. AD বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12$ বর্গ একক

$= 36$ বর্গ একক

এবং Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ BD. AD বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(25 - 9) \times 12$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$ বর্গ একক

$= 96$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 36 বর্গ একক এবং 96 বর্গ একক।

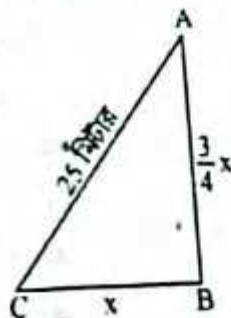
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

যার অতিভুজ, AC = 25 মিটার।

একটি বাহু, BC = x

অপর বাহু, $AB = \frac{3}{4}x$

আমরা জানি,

সমকোণী ত্রিভুজে,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $(25)^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2$

বা, $625 = x^2 + \frac{9x^2}{16}$

বা, $625 = \frac{16x^2 + 9x^2}{16}$

বা, $25x^2 = 625 \times 16$

বা, $x^2 = \frac{10000}{25}$

বা, $x^2 = 400$

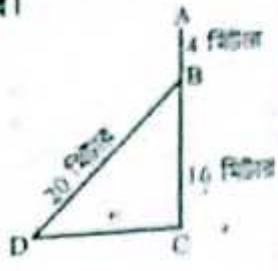
$\therefore x = \sqrt{400} = 20$

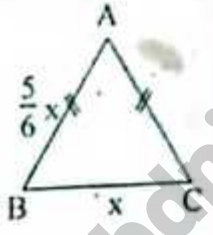
$\therefore$ অপর বাহু, $AB = \frac{3}{4} \times 20$

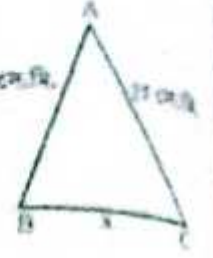
$= 15$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 15 মিটার

২। 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়াভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে উপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে।

সমাধান :
মনে করি, AC মইয়ের গোড়া C থেকে D বিন্দুতে সরালে উপরের প্রান্ত A থেকে B তে নেমে আসে।
মইয়ের দৈর্ঘ্য, AC = BD = 20 মিটার
এবং AB = 4 মিটার
$\therefore$ BC = 16 মিটার
এখন, BCD সমকোণী ত্রিভুজে,
$BC^2 + CD^2 = BD^2$
বা, $(16)^2 + (CD)^2 = (20)^2$
বা, $(CD)^2 = (20)^2 - (16)^2$
বা, $(CD)^2 = 400 - 256$
বা, $(CD)^2 = 144$
$\therefore CD = \sqrt{144}$
$= 12$
$\therefore$ মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে 12 সে.মি. দূরে সরালে উপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে।

৩। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 16 মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

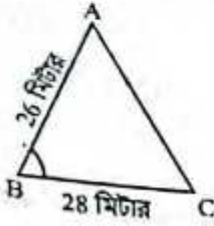
সমাধান :
মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ভূমি, BC = x মিটার।
$\therefore AB = AC = \frac{5x}{6}$
প্রশ্নমতে, $x + \frac{5x}{6} + \frac{5x}{6} = 16$
বা, $\frac{6x + 5x + 5x}{6} = 16$
বা, $16x = 16 \times 6$
$\therefore x = \frac{16 \times 6}{16}$
$= 6$
অতএব, ত্রিভুজটির ভূমি, BC = 6 মিটার
এবং অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, $AB = AC = \frac{5}{6} \times 6$ মিটার
= 5 মিটার।
এখন, ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির পরিসীমা, 2S = 16 মিটার
বা, $S = \frac{16}{2}$ মিটার
$\therefore$ S = 8 মিটার
বা, Δ-ক্ষেত্রে ABC-এর ক্ষেত্রফল
বা, $\sqrt{S(S-BC)(S-CA)(S-AB)}$
বা, $\sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)}$
বা, $\sqrt{8 \times 2 \times 3 \times 3}$
বা, $\sqrt{144}$
বর্গ মিটার
নির্ণেয় ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 12 বর্গ মিটার।

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সে.মি., 27 সে.মি. এবং পরিসীমা 84 সে.মি.। ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। যার, AB = 25 সে.মি., AC = 27 সে.মি. এবং BC = x মিটার।
প্রশ্নমতে, $x + 27 + 25 = 84$
বা, $x + 52 = 84$
বা, $x = 84 - 52$
$\therefore x = 32$
এখন, Δ-ক্ষেত্রটির পরিসীমা, 2S = 84
বা, $S = \frac{84}{2}$
$\therefore$ S = 42
এখন, Δ ক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফল
$= \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$
$= \sqrt{42(42-25)(42-27)(42-32)}$
$= \sqrt{42 \times 17 \times 15 \times 10}$
$= \sqrt{107100}$
= 327.261 বর্গ সে.মি.।
$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 327.261 বর্গ সে.মি.।

৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গ মিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার।
$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ মিটার।
প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল
$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2$ বর্গ মিটার।
প্রশ্নমতে, $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 6\sqrt{3}$
বা, $\frac{\sqrt{3}(a^2 + 4a + 4)}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2 + 24\sqrt{3}}{4}$
বা, $\sqrt{3}(a^2 + 4a + 4) = \sqrt{3}a^2 + 24\sqrt{3}$
বা, $\sqrt{3}(a^2 + 4a + 4) = \sqrt{3}(a^2 + 24)$
বা, $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 24$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{3}$ দ্বারা ভাগ করে]
বা, $a^2 + 4a + 4 - a^2 - 24 = 0$
বা, $4a - 20 = 0$
বা, $4a = 20$
বা, $a = \frac{20}{4}$
বা, $a = 5$
$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 5 মিটার।

৬। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 182 বর্গ মিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু, AB = 26 মিটার এবং BC = 28 মিটার

দেয়া আছে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 182 বর্গ মিটার।

∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times BC \sin\theta$

বা, $182 = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\theta$

বা, $364 = 26 \times 28 \sin\theta$

বা, $728 \sin\theta = 364$

বা, $\sin\theta = \frac{364}{728}$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin 30°$ $\left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore \theta = 30°$

∴ নির্ণেয় বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = 30°$।

৭। একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে.মি. কম। ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে ভূমি = BC, লম্ব = AC এবং অতিভুজ = AB

মনে করি, ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য, BC = x সে.মি.।

প্রশ্নমতে, লম্ব, $AC = \left(\frac{11}{12}x - 6\right)$ সে.মি.

এবং অতিভুজ, $AB = \left(\frac{4}{3}x - 3\right)$ সে.মি.।

এখন ABC সমকোণী ত্রিভুজে, পিথাগোরাসের সূত্র মতে,

$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{ভূমি})^2 + (\text{লম্ব})^2$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

বা, $\left(\frac{4x}{3} - 3\right)^2 = x^2 + \left(\frac{11x}{12} - 6\right)^2$

বা, $\frac{16x^2}{9} - 2 \times \frac{4}{3}x \times 3 + 9 = x^2 + \frac{121x^2}{144} - \frac{2 \times 11x}{12} \times 6 + 36$

বা, $\frac{16x^2}{9} - 8x + 9 = x^2 + \frac{121x^2}{144} - 11x + 36$

বা, $\frac{16x^2 - 72x + 81}{9} = \frac{144x^2 + 121x^2 - 11 \times 144x + 36 \times 144}{144}$

বা, $\frac{16x^2 - 72x + 81}{9} = \frac{265x^2 - 1584x + 5184}{144}$

বা, $16x^2 - 72x + 81 = \frac{265x^2 - 1584x + 5184}{16}$ [উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $16(16x^2 - 72x + 81) = 265x^2 - 1584x + 5184$

বা, $256x^2 - 1152x + 1296 = 265x^2 - 1584x + 5184$

বা, $256x^2 - 1152x + 1296 - 265x^2 - 1584x - 5184 = 0$

বা, $-9x^2 - 432x - 3888 = 0$

বা, $9x^2 - 432x + 3888 = 0$

বা, $x^2 - 48x + 432 = 0$

বা, $x^2 - 36x - 12x + 432 = 0$

বা, $x(x - 36) - 12(x - 36) = 0$

বা, $(x - 36)(x - 12) = 0$

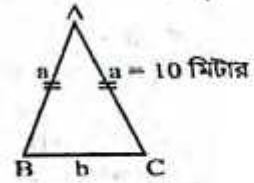
হয়, $x - 36$ অথবা, $x - 12 = 0$

$\therefore x = 36$ $\therefore x = 12$

অতএব, ত্রিভুজটির ভূমির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 36 সে.মি. অথবা 12 সে.মি. (Ans.)

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গ মিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ABC, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য, a = 10 মিটার এবং ভূমির দৈর্ঘ্য b মিটার এর ক্ষেত্রফল = 48 বর্গ মিটার।

আমরা জানি,

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

বা, $48 = \frac{b}{4}\sqrt{4 \times (10)^2 - b^2}$

বা, $b\sqrt{4 \times 100 - b^2} = 48 \times 4$

বা, $b\sqrt{400 - b^2} = 192$

বা, $\left(b\sqrt{400 - b^2}\right)^2 = (192)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $b^2(400 - b^2) = 36864$

বা, $400b^2 - b^4 = 36864$

বা, $400b^2 - b^4 - 36864 = 0$

বা, $b^4 - 400b^2 + 36864 = 0$ [−1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $b^4 - 256b^2 - 144b^2 + 36864 = 0$

বা, $b^2(b^2 - 256) - 144(b^2 - 256) = 0$

বা, $(b^2 - 256)(b^2 - 144) = 0$

হয়, $b^2 - 256 = 0$ অথবা, $b^2 - 144 = 0$

বা, $b^2 = 256$ বা, $b^2 = 144$

বা, $b = \sqrt{256}$ বা, $b = \sqrt{144}$

$\therefore b = 16$ $\therefore b = 12$

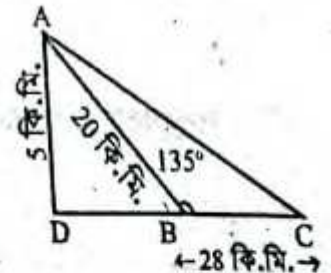
∴ নির্ণেয় ভূমির দৈর্ঘ্য 16 মিটার অথবা 12 মিটার।

৯। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135° কোণ করে দুই দিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হল। 4 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

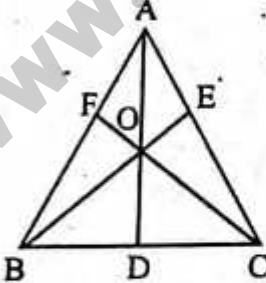
সমাধান: ধরি, নির্দিষ্ট স্থান B,

এবং B থেকে লোক দুটি 7 কি.মি. ও 5 কি.মি. বেগে 4 ঘণ্টা পর যথাক্রমে C ও A বিন্দুতে পৌঁছে।

(চিত্র: A, D, B, C; 20 কি.মি.; 135°; ←28 কি.মি.→)

তাহলে BC অতিক্রান্ত দূরত্ব = 7 × 4 = 28 কি.মি.

এবং AB অতিক্রান্ত দূরত্ব = 5 × 4 = 20 কি.মি.
দেয়া আছে $\angle ABC = 135°$
BC-এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব আঁকি।
এখন, Δ ABD-এ
$\angle ABD = 180° - 135° = 45°$
এবং $\angle ADB = 90°$
$\therefore \angle BAD = 45°$
$\therefore AD = BD$
আবার, Δ ABD সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ
সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
বা, $(20)^2 = BD^2 + BD^2$
বা, $400 = 2BD^2$
বা, $2BD^2 = 400$
বা, $BD^2 = \frac{400}{2}$
বা, $BD^2 = 200$
বা, $BD = \sqrt{200}$
$\therefore BD = 14.14$
এখন, Δ ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজে BD, AB এর লম্ব অভিক্ষেপ,
সুতরাং $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$
বা, $AC^2 = (20)^2 + (28)^2 + 2 \times 28 \times 14.14$
বা, $AC^2 = 400 + 784 + 791.84$
বা, $AC^2 = 1975.84$
$\therefore AC = 44.45$ (প্রায়)
অতএব, 4 ঘণ্টা পর তাদের সরাসরি দূরত্ব হবে 44.45 কি.মি. (প্রায়) (Ans.)

১০। একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে বাহু তিনটির উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি.; 7 সে.মি. ও 8 সে.মি.। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। O এর অভ্যন্তরস্থ যে কোন একটি বিন্দু। O থেকে BC, CA ও AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব আঁকি। OA, OB এবং OC যোগ করি।

ধরি, BC = CA = AB = a সে.মি.।
প্রশ্নানুসারে, OD = 6 সে.মি., OE = 7 সে.মি. এবং OF = 8 সে.মি.

এখন, ΔOBC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
$= \frac{1}{2} \times BC \times OD$
$= \frac{1}{2} \times a \times 6$
$= 3a$ বর্গ সে.মি.

অনুরূপভাবে, ΔOAC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a \times 7$
$= \frac{7}{2}a$ বর্গ সে.মি.

এবং ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a \times 8$
$= 4a$ বর্গ সে.মি.

$\therefore \Delta$ABC এর ক্ষেত্রফল = ΔOBC ক্ষেত্র + ΔOAC ক্ষেত্র + ΔOAB ক্ষেত্র
$= 3a + \frac{7a}{2} + 4a$
$= \frac{6a + 7a + 8a}{2} = \frac{21a}{2}$ বর্গ সে.মি.

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

শর্তানুসারে, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{21a}{2}$
বা, $\sqrt{3}a^2 = \frac{21 \times 4}{2} \times a$
বা, $\sqrt{3}a^2 = 42a$
বা, $\sqrt{3}a^2 - 42a = 0$
বা, $a(\sqrt{3}a - 42) = 0$
কিন্তু $a \neq 0$
$\therefore \sqrt{3}a - 42 = 0$
বা, $\sqrt{3}a = 42$
$\therefore a = \frac{12}{\sqrt{3}}$
বা, $a = \frac{42 \times \sqrt{3}}{3}$ [হর ও লবকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে]
বা, $a = 14\sqrt{3}$
$= 14 \times 1.73205$
$= 24.2487$
$= 24.249$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (14\sqrt{3})^2$ [a এর মান বসিয়ে]
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 \times 14 \times 14$
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 42 \times 14$
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 588$
$= 147 \times \sqrt{3}$
$= 147 \times 1.73205$
$= 254.61135$ বর্গ সে.মি.

অতএব, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 24.249 সে.মি. (প্রায়) এবং ক্ষেত্রফল 254.611 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

অনুশীলনী- ১৬.২

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ২। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হত তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হত। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

∴ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000$ .... (i)

এবং $x - 10 = y$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $y = x - 10$ .... (iii)

সমীকরণ (i) এ $y = x - 10$ বসিয়ে পাই

$x(x - 10) = 2000$

বা, $x^2 - 10x - 2000 = 0$

বা, $x^2 - 50x + 40x - 2000 = 0$

বা, $(x - 50)(x + 40) = 0$

∴ $x - 50 = 0$ অথবা $x + 40 = 0$

বা, $x = 50$ অথবা $x = -40$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ $x = 50$

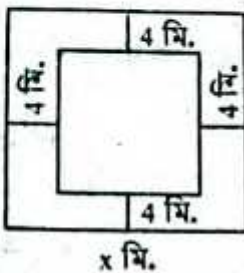
এখন, সমীকরণ (iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$y = 50 - 10 = 40$

∴ নির্ণেয় আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 50 মিটার এবং প্রস্থ 40 মিটার। (Ans)

উদাহরণ- ৩। বর্গাকার একটি মাঠের ভেতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল 1 হেক্টর হয়, তবে রাস্তা বাদে মাঠের ভেতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য x মিটার।

∴ মাঠের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গমিটার।

মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।

∴ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য $= (x - 2 \times 4)$ মি.

$= (x - 8)$ মি.

∴ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল

$= (x - 8)^2$ বর্গমিটার

সুতরাং রাস্তার ক্ষেত্রফল $= (x^2 - (x - 8)^2$ বর্গমিটার

আমরা জানি, 1 হেক্টর = 10000 বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (x - 8)^2 = 10000$

বা, $x^2 - x^2 + 16x - 64 = 10000$

বা, $16x = 10064$

∴ $x = 629$

রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল,

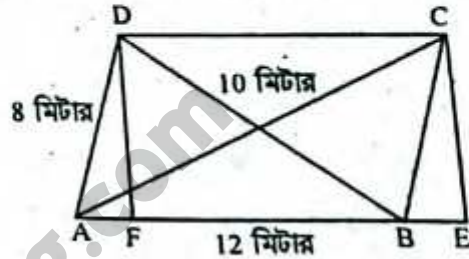
$= (629 - 8)^2$ বর্গমিটার

$= 385641$ বর্গমিটার

$= 38.56$ হেক্টর (প্রায়)

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 38.56 হেক্টর

উদাহরণ- ৫। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও 8 মিটার এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 10 মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AB = a = 12 মিটার, AD = c = 8 মিটার এবং কর্ণ BD = b = 10 মিটার। D ও C থেকে AB এর ওপর এবং AB এর বর্ধিতাংশের ওপর DF ও CE লম্ব টানি। A, C ও B, D যোগ করি।

ΔABD এর অর্ধপরিসীমা $s = \frac{12 + 10 + 8}{2}$ মিটার

$= 15$ মিটার

∴ Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

$= \sqrt{15(15 - 12)(15 - 10)(15 - 8)}$ বর্গমিটার

$= \sqrt{1575}$ বর্গমিটার = 39.68 বর্গমিটার (প্রায়)

আবার, Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times DF$

বা, $39.68 = \frac{1}{2} \times 12 \times DF$

বা, $6DF = 39.68$

∴ $DF = 6.61$

এখন, ΔBCE সমকোণী

∴ $BE^2 = BC^2 - CE^2$

$= AD^2 - DF^2$

$= 8^2 - (6.61)^2$

$= 20.31$

∴ $BE = 4.5$

অতএব, $AE = AB + BE$

$= 12 + 4.5 = 16.5$

ΔACE সমকোণী থেকে পাই,

$AC^2 = AE^2 - CE^2$

$= (16.5)^2 - (6.61)^2 = 315.94$

∴ $AC = 17.77$ (প্রায়)

∴ নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 17.77 মিটার (প্রায়)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

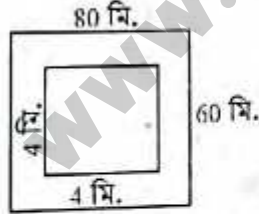
১। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গ মিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি,
আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = x মিটার
" " দৈর্ঘ্য = 2x মিটার
∴ এবং " " ক্ষেত্রফল = 2x × x বর্গ মিটার
= $2x^2$ বর্গ মিটার

শর্তমতে, $2x^2 = 512$
বা, $x^2 = \frac{512}{2}$
বা, $x^2 = 256$
বা, $x = \sqrt{256}$
∴ $x = 16$
∴ আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = 16 মিটার
" " দৈর্ঘ্য = 2 × 16 মিটার
= 32 মিটার
এখন, আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(16 + 32)
= 2 × 48
= 96 মিটার
∴ নির্ণেয় আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা = 96 মিটার।

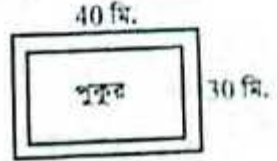
২। একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 5 মিটার হয়। তবে পুকুর পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

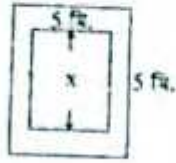
এখানে, জমির দৈর্ঘ্য = 80 মিটার
এবং জমির প্রস্থ = 60 মিটার
∴ জমির ক্ষেত্রফল = (80 × 60) বর্গ মিটার
= 4800 বর্গ মিটার।
পুকুরের পাড় বাদে শুধু পুকুরের দৈর্ঘ্য = {80 − (4 + 4)} মিটার
= (80 − 8) মিটার
= 72 মিটার
পুকুরের পাড় বাদে শুধু পুকুরের প্রস্থ = {60 − (4 + 4)} মিটার
= (60 − 8) মিটার
= 52 মিটার
∴ শুধু পুকুরের ক্ষেত্রফল = 72 × 52 বর্গ মিটার
= 3744 বর্গ মিটার
∴ পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল = জমি ক্ষেত্রফল − শুধু পুকুরের ক্ষেত্রফল
= (4800 − 3744) বর্গ মিটার
= 1056 বর্গ মিটার।
অতএব, পুকুর পাড়ের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 1056 বর্গ মিটার।

৩। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান :

40 মি.
পুকুর
30 মি.

দেওয়া আছে, বাগানের দৈর্ঘ্য = 40 মিটার
এবং বাগানের প্রস্থ = 30 মিটার
∴ বাগানের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ
= 40 মিটার × 30 মিটার
= 1200 বর্গ মিটার
ধরি, পুকুরের পাড়ের বিস্তার = A মিটার
∴ পুকুরের দৈর্ঘ্য = {40 − (A + A)} = (40 − 2A)} মিটার
এবং পুকুরের প্রস্থ = {30 − (A + A)} = (30 − 2A) মিটার
∴ পুকুরের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ
= (40 − 2A) (30 − 2A) বর্গ মিটার
কিন্তু, শর্তানুসারে,
$(40 - 2A)(30 - 2A) = \frac{1}{2} \times$ বাগানের ক্ষেত্রফল
বা, $1200 - 80A - 60A + 4A^2 = \frac{1}{2} \times 1200$
বা, $1200 - 140A + 4A^2 = 600$
বা, $4A^2 - 140A + 1200 - 600 = 0$
বা, $4A^2 - 140A + 600 = 0$
বা, $4(A^2 - 35A + 150) = 0$
বা, $A^2 - 35A + 150 = 0$
বা, $A^2 - 30A - 5A + 150 = 0$
বা, $A(A - 30) - 5(A - 30) = 0$.
বা, $(A - 5)(A - 30) = 0$
হয়, $A - 30 = 0$ অথবা, $A - 5 = 0$
∴ $A = 30$ ∴ $A = 5$
কিন্তু A = 30 গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ পুকুরের বিস্তার 30 মিটার হলে পুকুর খনন সম্ভব নয়।
∴ A = 5 গ্রহণযোগ্য মান।
∴ পুকুরের দৈর্ঘ্য = (40 − 2A) মিটার
= (40 − 2 × 5) মিটার
= (40 − 10) মিটার
= 30 মিটার।
এবং পুকুরের প্রস্থ = (30 − 2A) মিটার
= (30 − 2 × 5) মিটার
= (30 − 10) মিটার
= 20 মিটার
অতএব, পুকুরের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 30 মিটার এবং প্রস্থ 20 মিটার।

৪। একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গ মিটার হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি,
বর্গাকার বাগানের একবাহুর দৈর্ঘ্য = x মিটার

∴ বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মিটার

দেয়া আছে,
রাস্তার ক্ষেত্রফল = 500 বর্গ মিটার।

অতএব, রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল = $(x^2 + 500)$ বর্গ মিটার.......(i)

আবার,
রাস্তাসহ বর্গাকার বাগানের একবাহুর দৈর্ঘ্য = $\{x + (5 + 5)\}$ মিটার
= $(x + 10)$ মিটার

∴ রাস্তাসহ বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = $(x + 10)^2$ বর্গ মিটার
= $(x^2 + 20x + 100)$ বর্গ মিটার.......(ii)

(i) ও (ii) নং হতে,
$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 500$
বা, $20x = 500 - 100$
বা, $20x = 400$
বা, $x = \frac{400}{20}$ = 20
∴ $x = 20$

∴ বাগানের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মিটার
= $(20)^2$ বর্গ মিটার
= 400 বর্গ মিটার।

∴ নির্ণেয় বাগানের ক্ষেত্রফল 400 বর্গ মিটার।

৫। একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গ মিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে।

সমাধান :

মনে করি,
আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = x মিটার
তাহলে " দৈর্ঘ্য = 3x মিটার

∴ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 3x.x বর্গ মিটার
= $3x^2$ বর্গ মিটার

প্রশ্নমতে, $3x^2 = 768$
বা, $x^2 = \frac{768}{3}$
বা, $x^2 = 256$
বা, $x = \sqrt{256}$
∴ $x = 16$

অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 16 মিটার
" দৈর্ঘ্য = 3 × 16 মিটার
= 48 মিটার

অতপর, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)
= 2(48 + 16)
= 2 × 64
= 128 মিটার

যেহেতু, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান।
সুতরাং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 128 মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্য = (128 ÷ 4) মিটার
= 32 মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(32)^2$ বর্গ মিটার
= 1024 বর্গ মিটার

এখানে, বর্গাকার প্রতিটি পাথরের দৈর্ঘ্য = 40 সে.মি.
= $\frac{40}{100}$ মিটার
= 0.4 মিটার

অতএব, বর্গাকার পাথরের ক্ষেত্রফল = $(0.4)^2$ বর্গ মিটার
= 0.16 বর্গ মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রটির জন্য মোট পাথর লাগবে = (1024 ÷ 0.16)
= 6400 টি

∴ নির্ণেয় পাথরের সংখ্যা = 6400 টি।

৬। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়াতাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান :

← A →
↑ B ↓
← (A–6) → 6 মি.

মনে করি,
আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = A মিটার
এবং " প্রস্থ = B মিটার

∴ ক্ষেত্রটির = A × B বর্গ মিটার
= AB বর্গ মিটার

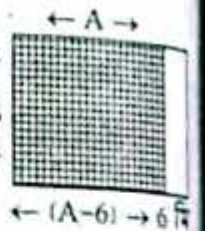
প্রশ্নমতে, ক্ষেত্রফল, AB = 160.......(i)

আবার, দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হলে আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হয়।

∴ A – 6 = B [কারণ বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান]
বা, A = B + 6.......(ii)

A এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,
(B + 6) B = 160
বা, $B^2 + 6B - 160 = 0$
বা, $B^2 + 16B - 10B - 160 = 0$
বা, $B(B + 16) - 10(B + 16) = 0$
বা, $(B + 16)(B - 10) = 0$

হয়, B + 16 = 0 বা, B = – 16 গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।	নতুবা B – 10 = 0 বা, B = 10 ∴ B = 10

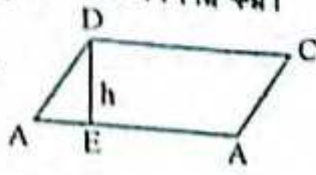
তখন, B এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,
A = 10 + 6

= 16 মিটার।

∴ নির্ণেয় আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 16 মিটার

এবং প্রস্থ = 10 মিটার।

। একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গ ইঞ্চি হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি,
সামান্তরিকের উচ্চতা = x

∴ ভূমি = $\frac{3}{4}$x

আমরা জানি,
সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

বা, $363 = x \times \frac{3}{4}x$

বা, $363 = \frac{3}{4}x^2$

বা, $\frac{3}{4}x^2 = 363$

বা, $3x^2 = 363 \times 4$

বা, $x^2 = \frac{363 \times 4}{3}$ (121)

বা, $x^2 = 484$

বা, $x = \sqrt{484}$

∴ x = 22

অর্থাৎ, সামান্তরিকের উচ্চতা = 22

এবং ভূমি = $\frac{3}{4} \times 22$ (11/2)

$= \frac{33}{2}$

= 16.5

∴ নির্ণেয় সামান্তরিকের উচ্চতা = 22 মিটার

এবং ভূমি = 16.5 মিটার

। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে। বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

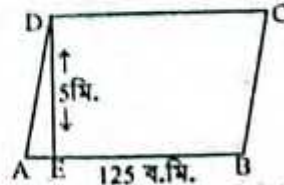
সমাধান: ধরি, ABCD একটি সামান্তরিক
এর ভূমি, AB = 125 মিটার
এবং উচ্চতা, DE = 5 মিটার

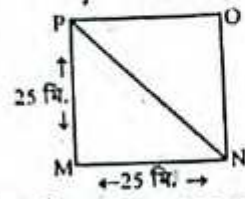
∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা
= AB × DE
= 125 × 5 বর্গ মিটার
= 625 বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 625 বর্গ মিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = x মিটার

তাহলে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x.x বর্গ মিটার
= x^2 বর্গ মিটার

∴ $x^2 = 625$

বা, $x = \sqrt{(25)^2}$

∴ x = 25 মিটার

আবার, ধরি, PMNO একটি বর্গক্ষেত্র। PMNO বর্গের P এবং N বিন্দু যোগ করি। এখন Δ PMN-এ ∠PMN = 90 এবং PN অতিভুজ।

∴ পীথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী, $PN^2 = PM^2 + MN^2$

বা, $PN^2 = (25)^2 + (25)^2$

[∵ বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহু সমান সেক্ষেত্রে PM = MN = 25 মিটার]

বা, $PN^2 = 625 + 625 = 1250$

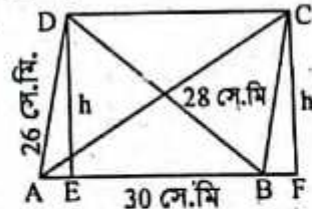
∴ $PN^2 = \sqrt{1250}$

= 35.35 মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = 35.35 মিটার (প্রায়)

অতএব, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 35.35 মিটার (প্রায়)

৯। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. ও 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 28 সে.মি. হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর?

সমাধান: ধরি, ABCD একটি সামান্তরিক
দেয়া আছে, AB = DC = 30 সে.মি.
AD = BC = 26 সে.মি.
কর্ণ, BD = 28 সে.মি.
অপর কর্ণ, AC = ?

∴ Δ ABD এর পরিসীমা, 2s = (AB + BD + AD) একক

বা, 2s = (30 + 28 + 26) সে.মি.

বা, $s = \frac{84}{2}$ সে.মি.

∴ s = 42 সে.মি

∴ Δ ABD এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-AB)(s-BD)(s-AD)}$....... (i)

এখন, (i) নং সমীকরণে s, AB, BD এবং AD এর মান বসিয়ে পাই,

$\sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{42 \times 12 \times 14 \times 16}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{7 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 \times 7 \times 4 \times 4}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{7^2 \times 6^2 \times 4^2 \times 2^2}$ বর্গ সে.মি.

= 7 × 6 × 4 × 2 বর্গ সে.মি.

= 336 বর্গ সে.মি.

আবার, Δ ABD এর ভূমি, AB = 30 সে.মি. এবং উচ্চতা,

DE = h (ধরি)

$\triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times AB \times DE$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times h$

কিন্তু $\triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল = 336 বর্গ সে.মি.

$\therefore \frac{1}{2} \times 30 \times h = 336$

বা, $15h = 336$

বা, $h = \frac{336}{15}$

$\therefore h = 22.40$ সে.মি.

$\therefore$ উচ্চতা, $DE = CF = 22.40$ সে.মি.

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ CBF হতে পাই, $BC^2 = CF^2 + BF^2$

বা, $(26)^2 = (22.40)^2 + (BF)^2$

বা, $(BF)^2 + (22.40)^2 = (26)^2$

বা, $BF^2 = (26)^2 - (22.40)^2$

বা, $BF^2 = 676 - 501.76$

বা, $BF^2 = 174.24$

$\therefore BF = \sqrt{174.24}$

$= 13.2$ সে.মি.

এখন, $\triangle ACF$ হতে পাই, $AC^2 = AF^2 + CF^2$

বা, $AC^2 = (30 + 13.2)^2 + (22.4)^2$

$= (43.2)^2 + (22.4)^2$

$= 1866.24 + 501.76$

$= 2368.00$

$\therefore AC = \sqrt{2368}$

$= 48.66$ সে.মি. (প্রায়)

অতএব, সামান্তরিকটির অপর কর্ণের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 48.66 সে.মি. (প্রায়)।

১০। একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABCD একটি রম্বস। AC ও BD এর দুইটি কর্ণ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখানে, রম্বসের পরিসীমা = 180 সে.মি.

ধরি, একটি কর্ণ, AC = 54 সে.মি.

$\therefore$ রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$ বর্গ একক

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times \overset{27}{54} = 27$ সে.মি.

এবং $BO = \frac{1}{2} BD$

আবার, রম্বসের বাহু চারটি সমান বলে,

$AB = \frac{\text{চার বাহুর সমষ্টি}}{4} = \frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{\overset{45}{180}}{4} = 45$ সে.মি.

এখন, ABO সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই, $AB^2 = AO^2 + BO^2$

বা, $(45)^2 = (27)^2 + \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$

বা, $2025 - 729 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$

বা, $1296 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$

বা, $(36)^2 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$

বা, $36 = \frac{1}{2} BD$

$\therefore BD = 72$ সে.মি.

$\therefore$ রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 54 \times 72$ বর্গ সে.মি.

$= 27 \times 72$ বর্গ সে.মি.

$= 1944$ বর্গ সে.মি.

অতএব, রম্বসটির অপর কর্ণের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 72 সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল = 1944 বর্গ সে.মি.।

১১। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 8 সে.মি. এবং তাদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। ট্রাপিজিয়াম দুইটির সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি,

ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল একটি বাহু x সে.মি.

$\therefore$ " অপর " $(x + 8)$ "

সমান্তরাল বাহু দুইটির লম্ব দূরত্ব h = 24 সে.মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল = (13×24) বর্গ সে.মি.

= 312 বর্গ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times 24 (x + x + 8) = 312$

বা, $2x + 8 = \frac{312}{12}$

বা, $2x + 8 = 26$

বা, $2x = 26 - 8$

বা, $2x = 18$

বা, $x = \frac{18}{2}$

$\therefore x = 9$

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল একটি বাহু x = 9 সে.মি.

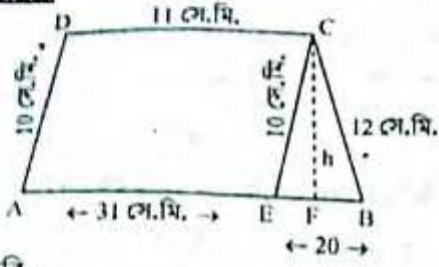
$\therefore$ " অপর " $(x + 8)$ "

$= (9 + 8)$ সে.মি.

$= 17$ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. ও 17 সে.মি.

১২। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সেন্টিমিটার এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি,

ABCD ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু AB থেকে DC এর সমান AE অংশ কাটি।

তাহলে, AE = CD = 11 সে.মি.

সুতরাং BE = AB − AE

= 31 − 11 সে.মি.

= 20 সে.মি.

এখন, Δ BEC এর CE = 10 সে.মি.

[∵ ABCE সামান্তরিকে AD = EC]

∴ Δ BEC এর অর্ধপরিসীমা, $S = \frac{CE + BE + BC}{2}$ একক

$= \frac{10 + 20 + 12}{2}$ সে.মি.

$= \frac{42}{2}$ সে.মি.

= 21 সে.মি.

তাহলে, Δ BEC এর ক্ষেত্রফল,

$= \sqrt{S(S - CE)(S - BE)(S - BC)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{21(21 - 10)(21 - 20)(21 - 12)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{21 \times 11 \times 1 \times 9}$

$= \sqrt{2079}$

= 45.596 বর্গ সে.মি.

আবার, CF, Δ BEC এর উচ্চতা,

∴ Δ ABEC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

বা, $45.596 = \frac{1}{2} \times BE \times CF$

বা, BE × CF = 91.192

বা, $CF = \frac{91.192}{BE}$

বা, $= \frac{91.192}{20}$

বা, = 4.56 সে.মি.

∴ ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা, CF = h = 4.56 সে.মি.

ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটি বাহু, a = 31 সে.মি. এবং অপর বাহু, B = 11 সে.মি.

∴ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$ বর্গ একক

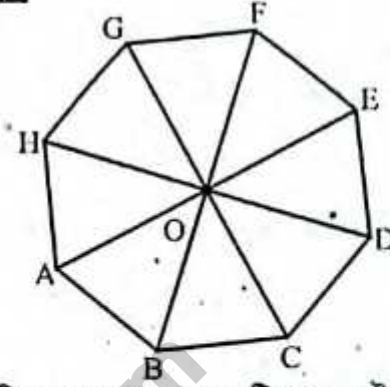
$= \frac{1}{2} \times (31 + 11) \times 4.56$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2} \times 42 \times 4.56$ বর্গ সে.মি.

= 95.75 বর্গ সে.মি.

∴ নির্ণেয় ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল = 95.75 বর্গ সে.মি.

১৩। একটি সুষম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1.5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, ABCDEFGH একটি সুষম অষ্টভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে 8 টি সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

∴ $\angle AOB = \frac{360°}{8} = 45°$

মনে করি,

O কেন্দ্র বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দুগুলোর দূরত্ব, a মিটার

এবং a = 1.5 মিটার

∴ Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ a.a sin 45°

$= \frac{1}{2} a^2 . \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$= \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{(1.5)^2}{2\sqrt{2}}$

= 0.7955 বর্গমিটার

∴ সুষম অষ্টভুজের ক্ষেত্রফল = 8 × Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল

= 8 × 0.7955 বর্গ মিটার

= 6.364 বর্গ মিটার

১৪। আয়তাকার একটি ফুলের বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

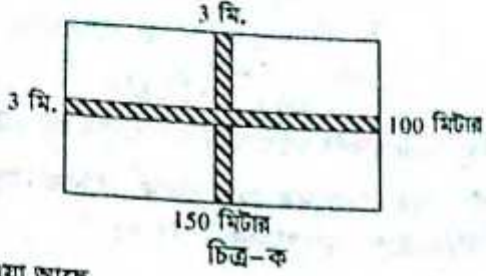
ক) উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

খ) রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি. এবং 12.5 সে.মি. প্রস্থ বিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন।

সমাধান :

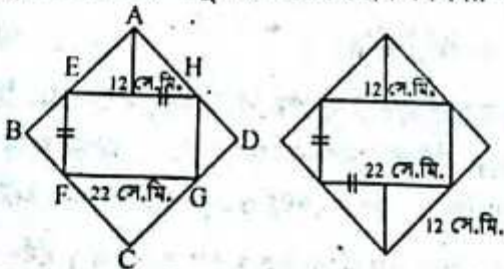
ক) বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মি. এবং প্রস্থ 100 মি. এর মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।

চিত্র–ক

খ) দেওয়া আছে
বাগানের দৈর্ঘ্য = 150 মিটার
এবং বাগানের প্রস্থ = 100 মিটার
∴ বাগানের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) বর্গ মিটার
= (150 × 100)
= 15000 বর্গ মিটার

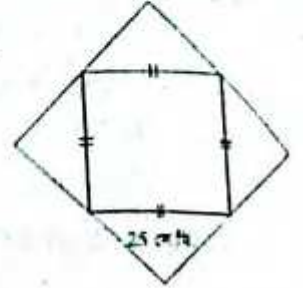
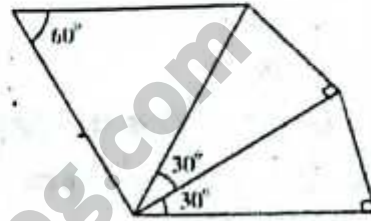
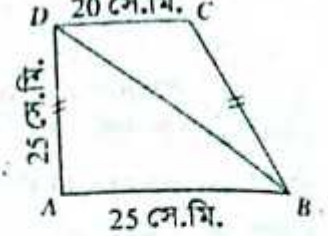
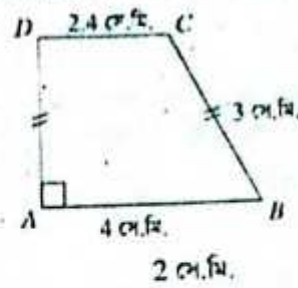
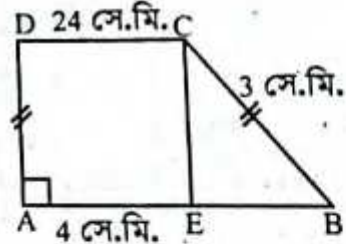
আবার,
রাস্তাবাদে বাগানের দৈর্ঘ্য = (150 − 3) মিটার
= 147 "
এবং " " প্রস্থ = (100 − 3) মিটার
= 97 "
∴ রাস্তাবাদে বাগানের ক্ষেত্রফল = (147 × 97) বর্গমিটার
= 14259 "

এখন, রাস্তার ক্ষেত্রফল = (বাগানের ক্ষেত্রফল − রাস্তাবাদে বাগানের ক্ষেত্রফল)
= (15000 − 14259) বর্গমিটার
= 741 "
∴ নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল = 741 বর্গ মিটার

গ) দেয়া আছে,
ইটের দৈর্ঘ্য = 25 সে.মি.
এবং " প্রস্থ = 12.5 "
∴ ইটের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) বর্গ সে.মি.
= (25 × 12.5) "
= 312.5 "
= $\frac{312.5}{100 \times 100}$ বর্গ মিটার
= 0.03125
∴ রাস্তাটি পাকা করতে ইটের প্রয়োজন = (রাস্তার ক্ষেত্রফল ÷ ইটের ক্ষেত্রফল)
= (741 ÷ 0.03125) বর্গ মিটার
= 23712 টি ইট
= 23712 টি
∴ নির্ণেয় ইটের প্রয়োজন 23712 টি।

১৫। বহুভুজ চিত্রে তথ্য অনুসারে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের অভ্যন্তরে EFGH বর্গক্ষেত্র রয়েছে।
EFGH বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = 22 সে.মি. [চিত্র অনুসারে]
A বিন্দু হতে EH বাহুর দূরত্ব = 12 সে.মি.।

তাহলে C বিন্দু হতে FG বাহুর দূরত্বও 12 সে.মি. হবে।
সুতরাং AC কর্ণের দৈর্ঘ্য = 22 + 12 + 12 সে.মি. = 46 সে.মি.
আমরা জানি, কর্ণ, $d = \sqrt{2}a$.
[যেখানে a = বর্গের একবাহুর দৈর্ঘ্য]
∴ $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ একক $= \frac{46}{\sqrt{2}}$ সে.মি. $= 23\sqrt{2}$ সে.মি.
∴ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য = $23\sqrt{2}$ সে.মি.
∴ " ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক
= $(23\sqrt{2})^2$ বর্গ সে.মি.
= 1058 বর্গ সে.মি. (Ans.)

১৬। নিচের চিত্রের তথ্য থেকে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ নং চিত্র :

এ চিত্রে C বিন্দু হতে CE ⊥ AB আঁকি।
ΔABC এ ∠BEC = 90°
BE = AB − AE
= 4 − 2.4 [∵ AE = CD]
= 1.6 সে.মি.

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$CE^2 + BE^2 = BC^2$
বা, $CE^2 + (1.6)^2 = 3^2$
বা, $CE^2 = 9 - 2.56$
= 6.44
∴ $CE = \sqrt{6.44} = 2.54$
∴ ADCE আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= AE × CE
= (2.4 × 2.54) বর্গ সে.মি.
= 6.096 বর্গ সে.মি.

Δ ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times BE \times CE$

$= \left(\frac{1}{2} \times 1.6 \times 2.54\right)$ বর্গ সে.মি.

$= 2.032$ ব.সে.মি.

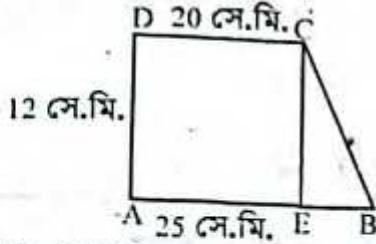
∴ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ADCE আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্রে BCE এর ক্ষেত্রফল।

$= (6.096 + 2.032)$ বর্গ সে.মি.

$= 8.128$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

২ নং চিত্র :

ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের C থেকে AB এর উপর CE লম্ব অঙ্কন করি।

∴ ΔBCE এ $\angle CEB = 90°$

∴ $BE = AB - AE$

$= 25$ সে.মি. $- 20$ সে.মি. [∵ CD = AE = 20 সে.মি.]

$= 5$ সে.মি.

∴ ADCE চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= CD \times AD$

$= (20 \times 12)$ বর্গ সে.মি.

$= 240$ বর্গ সে.মি.

আবার, Δ ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BE \times CE$

$= \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12\right)$ বর্গ সে.মি.

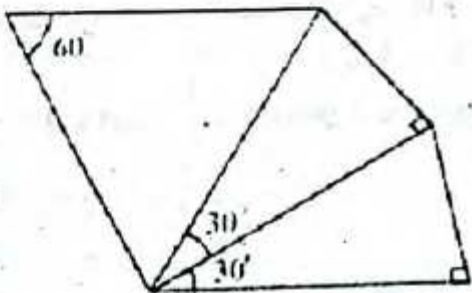
$= 30$ বর্গ সে.মি.

∴ ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADCE চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল

$= (240 + 30)$ বর্গ সে.মি.

$= 270$ বর্গ সে.মি.

অতএব, ২য় চিত্রের ক্ষেত্রফল 270 বর্গ সে.মি.

৩ নং চিত্র :

৩য় চিত্রে, ΔAEC এ

$\angle AEC = \angle EAC = \angle ACE = 60°$

∴ $AE = AC = EC = 2$ সে.মি.

∴ সমবাহু Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2$ [∵ a = 2 সে.মি.]

$= \sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

আবার, ΔABC এ

$\angle ACB = 30°$ এবং $AC = 2$ সে.মি.

∴ $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 30° = \frac{AB}{2}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{AB}{2}$

∴ $AB = 1$ সে.মি.

$\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$

বা, $\cos 30° = \frac{BC}{2}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2}$

∴ $BC = \sqrt{3}$ সে.মি.

∴ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$ [BC ⊥ AB]

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে.মি.

আবার,

ΔBCD এ $\angle BCD = 30°$ এবং $BC = \sqrt{3}$ সে.মি.

∴ $\sin \angle BCD = \frac{BD}{BC}$

বা, $\sin 30° = \frac{BD}{\sqrt{3}}$ [∵ $BC = \sqrt{3}$]

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{\sqrt{3}}$

∴ $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ সে.মি.

আবার, $\cos \angle BCD = \frac{CD}{BC}$

বা, $\cos 30° = \frac{BC}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CD}{\sqrt{3}}$

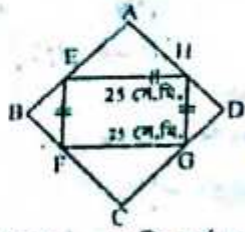
∴ $CD = \frac{3}{2}$ বর্গ সে.মি.

∴ Δ ক্ষেত্র BCD এর ক্ষেত্রফল [∵ BC ⊥ AB]

$= \frac{1}{2} \times CD \times BD$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ বর্গ সে.মি.

$= 3.25$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

৪ নং চিত্র :

চিত্রে যেহেতু EFGH একটি বর্গক্ষেত্র সেহেতু ABCD চতুর্ভুজটিও একটি বর্গক্ষেত্র।

∴ Δ ক্ষেত্র DGH এ – ∠GDH = 90°

ধরি, DH = DG = a

∴ সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্র GDH এ

$DG^2 + DH^2 = GH^2$

বা, $a^2 + a^2 = (25)^2$

বা, $2a^2 = (25)^2$

বা, $a^2 = \frac{(25)^2}{2}$

বা, $a = \frac{25}{\sqrt{2}}$

সুতরাং, AD = DH + AH

$= a + a$ [∵ DH = a = AH]

$= 2a$

∴ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য)²

$= (2a)^2$

$= 4\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{4 \times (25)^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= 1250$ বর্গ সে.মি.

অতএব, ৪র্থ চিত্রটির ক্ষেত্রফল 1250 বর্গ সে.মি.

❑ অনুশীলনী- ১৬.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ **কাজ :** একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৬৮]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r মিটার

∴ বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ মিটার।

এবং ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

প্রশ্নমতে,

$2\pi r = 440$

বা, $2r = \frac{440}{\pi} = \frac{440}{3.1416}$ মিটার

বা, $2r = 140.056$ মিটার

এখন, ΔABC সমকোণী

∴ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $\sqrt{AB^2 + AB^2} = \sqrt{(140.056)^2}$ [∵ AB = BC]

বা, $\sqrt{2AB^2} = 140.056$

বা, $\sqrt{2}\, AB = 140.056$

বা, $AB = \frac{140.056}{1.414}$

∴ AB = 99.0495 (প্রায়)

∴ নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 99.0495 মিটার

❑ **কাজ :** চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৭০]

সমাধান : এখানে, ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2}$ বর্গ একক

$= \frac{\pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{3.1416 \times 10 \times \overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}$ বর্গ সে.মি.

= 157.08 বর্গ সে.মি.

আবার, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

বা, $AB^2 = (20)^2 - (15)^2$

বা, $AB^2 = 400 - 225$

বা, $AB^2 = 175$

বা, $AB = \sqrt{175}$

∴ AB = 13.228

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$= \frac{1}{2} \times 13.228 \times 15$

= 99.215 বর্গ সে.মি.

∴ গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল + ΔABC এর ক্ষেত্রফল

= (157.08 + 99.215) বর্গ সে.মি.

= 256.295 বর্গ সে.মি.

উত্তর : 256.295 বর্গ সে.মি.

অনুশীলনী- ১৬.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৬৮]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r মিটার

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ মিটার।

এবং ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

প্রশ্নমতে,

$2\pi r = 440$

বা, $2r = \frac{440}{\pi} = \frac{440}{3.1416}$ মিটার

বা, $2r = 140.056$ মিটার

এখন, ΔABC সমকোণী

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $\sqrt{AB^2 + AB^2} = \sqrt{(140.056)^2}$ [$\because$ AB = BC]

বা, $\sqrt{2AB^2} = 140.056$

বা, $\sqrt{2}\,AB = 140.056$

বা, $AB = \frac{140.056}{1.414}$

$\therefore AB = 99.0495$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 99.0495 মিটার

কাজ : চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৭০]

সমাধান : এখানে, ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2}$ বর্গ একক

$= \frac{\pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{3.1416 \times 10 \times \overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}$ বর্গ সে.মি.

$= 157.08$ বর্গ সে.মি.

আবার, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

বা, $AB^2 = (20)^2 - (15)^2$

বা, $AB^2 = 400 - 225$

বা, $AB^2 = 175$

বা, $AB = \sqrt{175}$

$\therefore AB = 13.228$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$= \frac{1}{2} \times 13.228 \times 15$

$= 99.215$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = ADC ক্ষেত্রফল + ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= (157.08 + 99.215)$ বর্গ সে.মি.

$= 256.295$ বর্গ সে.মি.

উত্তর : 256.295 বর্গ সে.মি.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,
কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, 30°
বৃত্তের ব্যাস, $2r = 126$ সে.মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{126}{2}$ সে.মি.

$= 63$ সে.মি.

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $S = ?$

আমরা জানি, বৃত্তের কোণ চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্ত চাপের সমানুপাতিক।

$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{S}{2\pi r}$

বা, $S = \frac{2\pi r\theta}{360}$

$= \frac{2 \times 3.1416 \times 63 \times 30}{360}$

$= 32.987$ সে.মি. (প্রায়)

২। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি,
O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ = r মিটার।

$\therefore$ ব্যাস, $AB = (r + r)$ মি. $= 2r$ মি.

ঘোড়াটি 1 মিনিটে যায় = 66 মিটার

$\therefore$ " $1\frac{1}{2}$ বা $\frac{3}{2}$ " " $= \frac{\overset{33}{\cancel{66}} \times 3}{\cancel{2}}$ "

$= 99$ মিটার

বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 99$

বা, $2r = \frac{99}{3.1416}$

$= 31.513$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় মাঠের ব্যাস 31.513 মিটার।

৩। একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে,
বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = 77 বর্গ মিটার
এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 21$ মিটার
উৎপন্ন কোণ, $\theta = ?$
আমরা জানি,

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360}\pi r^2$

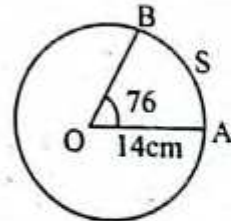
বা, $77 = \frac{\theta \times 3.1416 \times (21)^2}{360}$

বা, $\theta \times 3.1416 \times 441 = 360 \times 77$

বা, $\theta = \frac{27720}{1385.4456}$

$\therefore \theta = 20.008°$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপন্ন কোণ, 20.008°

৪। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 14$ সে.মি.
এবং বৃত্তচাপের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 76°$
বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = ?
আমরা জানি,

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{75 \times 3.1416 \times (14)^2}{360}$

$= \frac{46181 \cdot 52}{360}$

$= 128 \cdot 282$

$= 128 \cdot 282$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 128.282 বর্গ সে.মি.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,
কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, 30°
বৃত্তের ব্যাস, 2r = 126 সে.মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{126}{2}$ সে.মি.
$= 63$ সে.মি.

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, S = ?

আমরা জানি, বৃত্তের কোণ চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্ত চাপের সমানুপাতিক।

$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{S}{2\pi r}$

বা, $S = \frac{2\pi r\theta}{360}$

$= \frac{2 \times 3.1416 \times 63 \times 30}{360}$

$= 32.987$ সে.মি. (প্রায়)

২। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি,
O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ = r মিটার।

$\therefore$ ব্যাস, AB = (r + r) মি. = 2r মি.

ঘোড়াটি 1 মিনিটে যায় = 66 মিটার

$\therefore$ " $1\frac{1}{2}$ বা $\frac{3}{2}$ " " $= \frac{\overset{33}{\cancel{66}} \times 3}{\cancel{2}}$ "

$= 99$ মিটার

বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে পরিধি = $2\pi r$

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 99$

বা, $2r = \frac{99}{3.1416}$

$= 31.513$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় মাঠের ব্যাস 31.513 মিটার।

৩। একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে,
বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = 77 বর্গ মিটার
এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 21 মিটার
উৎপন্ন কোণ, θ = ?
আমরা জানি,

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360}\pi r^2$

বা, $77 = \frac{\theta \times 3.1416 \times (21)^2}{360}$

বা, $\theta \times 3.1416 \times 441 = 360 \times 77$

বা, $\theta = \frac{27720}{1385.4456}$

$\therefore \theta = 20.008°$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপন্ন কোণ, 20.008°

৪। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 14 সে.মি.
এবং বৃত্তচাপের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, θ = 76°
বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = ?
আমরা জানি,

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{75 \times 3.1416 \times (14)^2}{360}$

$= \frac{46181 \cdot 52}{360}$

$= 128 \cdot 282$

$= 128 \cdot 282$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 128.282 বর্গ সে.মি.

৫। একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির চওড়া নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, বৃত্তাকার রাস্তাটির প্রস্থ, AB = y মি.
এবং বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ = r মি.
∴ রাস্তাটির ভিতরের পরিধি = $2\pi r$
রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ = (r + y) মি.
∴ রাস্তাটির বাইরের পরিধি = $2\pi(r + y)$ মি.
শর্তানুসারে, $2\pi(r + y) - 2\pi r = 44$
বা, $2\pi(r + y - r) = 44$
বা, $2\pi y = 44$
বা, $\pi y = \frac{\overset{22}{44}}{2}$
বা, $y = \frac{22}{\pi}$
$= \frac{22}{3.1416}$ [∵ π = 3.1416]
= 7.00280 মি.
= 7.003 মি.
∴ রাস্তাটির প্রস্থ = 7.003 মি.
অতএব, রাস্তাটির নির্ণেয় প্রস্থ 7.003 মি.।

৬। একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস AB এবং পার্ককে বেষ্টন করে BF প্রশস্থ একটি পথ বিদ্যমান।
দেওয়া আছে, বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস AB = 26 মিটার
এবং পথটির প্রশস্ততা, BF = 2 মিটার
বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ, $r_1 = \frac{AB}{2} = \frac{26}{2}$ মি. = 13 মি.
এবং পার্কসহ পথ দ্বারা গঠিত বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ, r_2 = OB + BF
= (13 + 2) মিটার
= 15 মিটার
এখন, জানা আছে, যেকোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক
যেখানে r = উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং π = 3.1416
∴ বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল, $A_1 = \pi r_1^2$ বর্গ মি.
= $\pi (13)^2$ বর্গ মি. [∵ π = 3.1416]
= 3.1416 × 169
= 530.93 বর্গ মি.
এবং পার্কসহ পথ দ্বারা গঠিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A_2 = \pi r_2^2$ বর্গ মি.
= $\pi (15)^2$ বর্গ মি. [∵ π = 3.1416]
= 3.1416 × 225
= 706.86 বর্গ মি.
অতএব, পথটির ক্ষেত্রফল = $(A_2 - A_1)$ বর্গ মি.
= (706.86 − 530.93) বর্গ মি. = 175.93 বর্গ মি.
∴ প্রদত্ত পথের ক্ষেত্রফল 175.93 বর্গ মি. **(Ans.)**

৭। একটি গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস 28 সে.মি. এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সে.মি.। 44 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশি ঘুরবে?

সমাধান :
দেওয়া আছে,
গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস = 28 সে.মি.
∴ " " " ব্যাসার্ধ $r_1 = \frac{28}{2}$ সে.মি.
∴ r_1 = 14 সে.মি.
আবার,
গাড়ির পিছনের চাকার ব্যাস = 35 সে.মি.
∴ " " " ব্যাসার্ধ $r_2 = \frac{35}{2}$ সে.মি.
∴ r_2 = 17.5 সে.মি.
এখন,
গাড়ির সামনের চাকার পরিধি = $2\pi r_1$ সে.মি.
= 2 × 3.1416 × 14 সে.মি.
= 87.965 সে.মি.
গাড়ির পিছনের চাকার পরিধি = $2\pi r_2$ সে.মি.
= 2 × 3.1416 × 17.5 সে.মি.
= 109.956 সে.মি.
এখানে, 88 মিটার = 88 × 100 সে.মি.
= 8800 সে.মি.
∴ সামনের চাকা 87.965 সে.মি পথ যায় 1 বার ঘুরে
" " 1 " " " = $\frac{1}{87.695}$ " "
" " 8800 " " " = $\frac{8800}{87.695}$ " "
= 100 বার ঘুরে
আবার,
পিছনের চাকাটি 109.956 সে.মি. পথ যায় 1 বার ঘুরে
" " 1 " " " = $\frac{1}{109.956}$ " "
" " 8800 " " " = $\frac{8800}{109.956}$ " "
= 80.032 বার ঘুরে
অতএব, সামনের চাকা পিছনের দিকে অপেক্ষা (100 − 80)
= 20 বার বেশি ঘুরে
(Ans.)

৮। একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত

বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

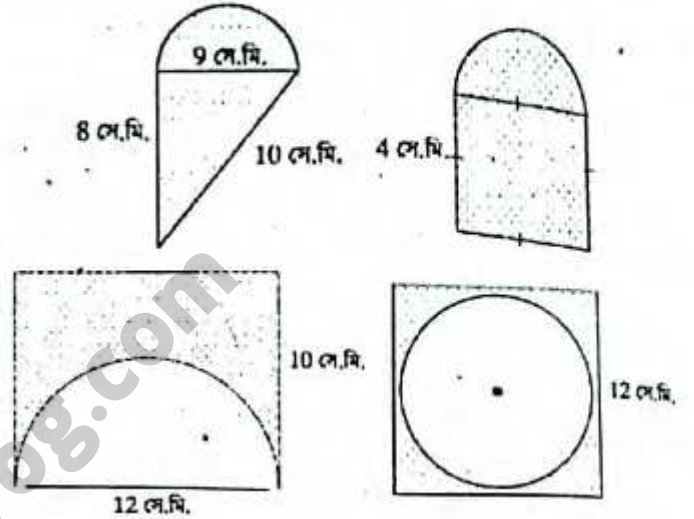
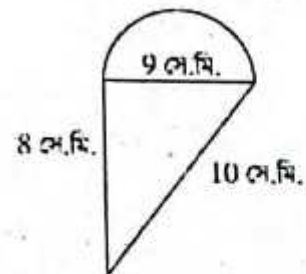
মনে করি,
বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r মিটার
এবং ABCD বর্গ ক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।
আমরা জানি,
বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$
প্রশ্নমতে, $2\pi r = 220$
বা, $2 \times 3.1416 \times r = 220$ $[\because \pi = 3.1416]$
বা, $r = \frac{220}{6.2832}$
$= 35.014$ মিটার
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস, $AC = 2 \times 35.014$ মিটার
$= 70$ মিটার
এখন, Δ ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ থেকে,
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
বা, $AB^2 + AB^2 = AC^2$ $[\because BC = AB]$
বা, $2AB^2 = AC^2$
বা, $AC^2 = 2AB^2$
বা, $AC = \sqrt{2}\,AB$
বা, $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$
$\therefore AB = \frac{70.028}{\sqrt{2}}$
$= 49.5173$ মিটার
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 49.5173 মিটার

৯। একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি,
বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r
$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$
এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2
প্রশ্নমতে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = $2\pi r$
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \frac{2\pi r}{3}$

এখন, ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\pi r}{3}\right)^2$ বর্গ একক
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4\pi^2 r^2}{9}$ বর্গ একক
$= \frac{\sqrt{3}\,\pi^2 r^2}{\sqrt{3}.\sqrt{3}.3}$
$= \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এর অনুপাত
$= \pi r^2 : \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$
$= \left(1 : \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$
$= 3\sqrt{3} : \pi$ (Ans.)

১০। নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :
চিত্র–১ :

ABCD এর ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ADE অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল
এখন,
ABC ত্রিভুজ এর অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{AB + BC + AC}{2}$
$= \frac{9 + 10 + 8}{2}$
$= \frac{27}{2}$ সে.মি.
$= 13.5$ সে.মি.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
$= \sqrt{S(S - AB)(S - BC)(S - AC)}$
$= \sqrt{13.5(13.5 - 9)(13.5 - 10)(13.5 - 8)}$
$= \sqrt{13.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 5.5}$
$= \sqrt{1169.4375}$
$= 34.197$ বর্গ সে.মি.

আবার,

ADB অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{9}{2}$ সে.মি. $= 4.5$ সে.মি.

ADB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times 3.1416 \times (4.5)^2$

$= 31.808$ বর্গ সে.মি.

এখন,

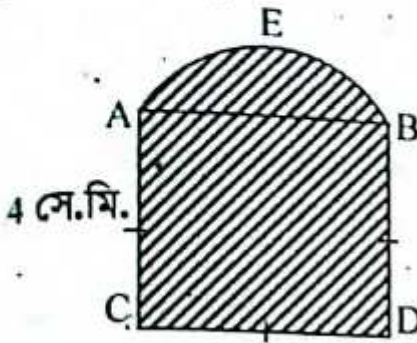
ABCD এর ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল – ADB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= 34.197 - 31.808$

$= 66.0057$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 66.0057$ বর্গ সে.মি.।

চিত্র–২ :

সমাধান :

মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং a = 4 সে.মি.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$

আবার, ABE একটি অর্ধবৃত্ত।

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{4}{2} = 2$ সে.মি.

সুতরাং অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$\therefore$ ABCDE সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল = ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AEB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \left(a^2 + \frac{1}{2}\pi r^2\right)$

$= \left\{(4)^2 + \frac{1}{2} \times 3.1416 \times (2)^2\right\}$

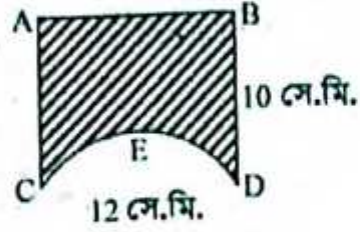
$= 16 + 0.5 \times 3.1416 \times 4$

$= 22.283$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 22.283 বর্গ সে.মি.

চিত্র–৩ :

সমাধান :

A B
10 সে.মি.
E
C D
12 সে.মি.

দেয়া আছে,

ABCD চতুর্ভুজের,

দৈর্ঘ্য, CD = 12 সে.মি.

প্রস্থ, BD = 10 সে.মি.

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$= (12 \times 10)$ বর্গ সে.মি.

$= 120$ বর্গ সে.মি.

এখন, CED একটি অর্ধবৃত্ত।

সুতরাং এর ব্যাসার্ধ, $r = \frac{12}{2}$ সে.মি. $= 6$ সে.মি.

$\therefore$ CED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= 0.5 \times 3.1416 \times (6)^2$

$= 56.55$ বর্গ সে.মি.

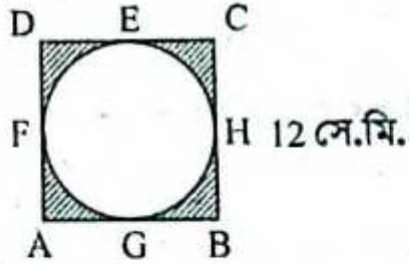
অতএব, ACEDB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল = ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল – CED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= (120 - 56.55)$ বর্গ সে.মি.

$= 63.45$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 63.45 বর্গ. সে.মি.

চিত্র–৪

সমাধান :

মনে করি,

ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য, a = 12 সে.মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ সে.মি.

$= (12)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 144$ বর্গ সে.মি.

আবার, EFGH বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{12}{2}$ সে.মি.

$= 6$ সে.মি.

এবং EFGH বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times (6)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 113.098$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল = ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= (144 - 113.098)$ বর্গ সে.মি. $= 30.902$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 30.902 বর্গ সে.মি.।

অনুশীলনী- ১৬.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

কাজ : তোমার গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৭২]

সমাধান : আমার গণিত বইটি স্কেল দিয়ে মেপে পাই,

দৈর্ঘ্য $a = 26$ সে.মি.

" " " প্রস্থ $b = 19$ সে.মি.

" " " উচ্চতা $c = 1.5$ সে.মি.

আয়তন $= abc$ ঘন একক

$= 26 \times 19 \times 1.5$ ঘন সে.মি.

$= 741$ ঘন সে.মি.

∴ বইটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ সে.মি.

$= 2(26 \times 19 + 19 \times 1.5 + 1.5 \times 26)$ বর্গ সে.মি.

$= 2(494 + 28.5 + 39)$ বর্গ সে.মি.

$= 1123$ বর্গ সে.মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= ((26)^2 + (19)^2 + (1.5)^2)$

$= 32.24$ সে.মি. (প্রায়)

∴ বইটির আয়তন 741 ঘন সে.মি., সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1123 বর্গ সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 32.24 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

কাজ : তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৭৩]

সমাধান : আমরা জানি, ঘনকের ধার a একক হলে,

ঘনকের আয়তন $= a^3$ ঘন একক

এবং ঘনকের কর্ণ $= \sqrt{3}a$ একক

এখানে, নতুন ঘনকের আয়তন $= (3^3 + 4^3 + 5^3)$ ঘন সে.মি.

$= (27 + 64 + 125)$ ঘন সে.মি.

$= 216$ ঘন সে.মি.

∴ নতুন ঘনকের ধার $= \sqrt[3]{216}$ সে.মি.

$= 6$ সে.মি.

আবার, নতুন ঘনকের কর্ণ $= \sqrt{3}a$ সে.মি.

$= \sqrt{3} \times 6$ সে.মি.

$= 10.392$ সে.মি.

উত্তর : ধার 6 সে.মি. এবং কর্ণ 10.392 সে.মি. (প্রায়)।

কাজ : একটি আয়তাকার কাগজের পাতা মোড়ায়ে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি কর। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 20$ সে.মি.

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = 10$ সে.মি.

এবং সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$ বর্গ একক

$= 2 \times 3.1416 \times (10 + 20)$ বর্গ সে.মি.

$= 2 \times 3.1416 \times 30$ "

$= 188.496$ বর্গ সে.মি.

∴ আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$= 3.1416 \times (10)^2 \times 20$ ঘন সে.মি.

$= 6283.2$ ঘন সে.মি.

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ–১। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 25 সে.মি. 20 সে.মি. এবং 15 সে.মি.। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 25$ সে.মি., প্রস্থ $b = 20$ সে.মি. এবং উচ্চতা $c = 15$ সে.মি.।

∴ আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ca)$

$= 2(25 \times 20 + 20 \times 15 + 15 \times 25)$ বর্গ সে.মি.

$= 2350$ বর্গ সে.মি.

আয়তন $= abc = 25 \times 20 \times 15$ ঘন সে.মি.

$= 7500$ ঘন সে.মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{(25)^2 + (20)^2 + (15)^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{625 + 400 + 225}$ সে.মি.

$= \sqrt{1250}$ সে.মি.

$= 35.353$ সে.মি. (প্রায়)

∴ নির্ণেয় সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2350 বর্গ সে.মি., আয়তন 2500 ঘন সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.353 সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ– ২। একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গমিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘনকটির ধার a.

∴ এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 96$

বা, $a^2 = 16$

$\therefore a = 4$

∴ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times a = 6.928$ মিটার (প্রায়)

∴ নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.928 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ–৩। একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 10 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে, এর আয়তন এবং সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা, h = 10 সে.মি. এবং ভূমিকর ব্যাসার্ধ, r = 7 সে.মি.

∴ এর আয়তন $= \pi r^2 h = 3.1416 \times 7^2 \times 10$ (ঘন সে.মি.)

$= 1539.38$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

এবং সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 7(7 + 10)$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$= 747.7$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

উদাহরণ– ৪। ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. এবং ভেতরের সমগ্র বাক্সটির ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে.মি.। এর দেওয়ালের পুরুত্ব সমান হলে, বাক্সের বেধ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বাক্সের বেধ x

ঢাকনাসহ বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি. 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

∴ বাক্সের ভেতরের মাপ যথাক্রমে $a = (10 - 2x)$, $b = (9 - 2x)$ ও $c = (7 - 2x)$ সে.মি.

∴ বাক্সের ভেতরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ca)$

প্রশ্নানুসারে, $2(ab + bc + ca) = 262$

বা, $(10 - 2x)(9 - 2x) + (9 - 2x)(7 - 2x) + (7 - 2x)(10 - 2x) = 131$

বা, $90 - 38x + 4x^2 + 63 - 32x + 4x^2 + 70 - 34x + 4x^2 - 131 = 0$

বা, $12x^2 - 104x + 92 = 0$

বা, $3x^2 - 26x + 23 = 0$

বা, $3x^2 - 3x - 23x + 23 = 0$

বা, $3x(x - 1) - 23(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(3x - 23)(x - 1) = 0$

বা, $x - 1 = 0$ অথবা, $3x - 23 = 0$

বা, $x = 1$ বা, $x = \frac{23}{3} = 7.67$ (প্রায়)

কিন্তু বাক্সের বেধ এর দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ বা উচ্চতায় সমান অথবা বড় হতে পারে না।

$\therefore x = 1$

∴ নির্ণেয় বাক্সের বেধ 1 সে.মি.।

উদাহরণ– ৫। কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয়কর।

সমাধান : মনে করি, ঘনকের ধার = a

∴ ঘনকটির পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

এবং আয়তন $= a^3$ ঘন একক।

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}a = 8\sqrt{2} \therefore a = 8$

∴ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 8$ সে.মি.

$= 13.856$ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= 8^3$ ঘন সে.মি.

$= 512$ ঘন সে.মি.।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 13.856 সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 512 ঘন সে.মি.।

উদাহরণ– ৬। কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চর্তুদিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চর্তুদিকে ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন আকৃতির ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে, যার উচ্চতা h = 12 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r = 5 সে.মি.।

∴ উৎপন্ন ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi r(r + h)$ বর্গ একক

$= 2 \times 3.1416 \times 5(5 + 12)$ বর্গ সে.মি.

$= 534.071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \pi r^2 h$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 5^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 942.48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

∴ নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 534.071 বর্গ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 942.48 ঘন সে.মি. (প্রায়)।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 5 সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত?

ক 12 খ 20
গ 24 ঘ 28

উত্তর : ক) 12

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক $3\sqrt{3}$ খ $4\sqrt{3}$
গ $6\sqrt{3}$ ঘ $9\sqrt{3}$

উত্তর : ঘ) $9\sqrt{3}$

৩। একটি ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা 8 সে.মি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. হলে, তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক 24 খ 64
গ 96 ঘ 504

উত্তর : খ) 64

৪। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. 4 সে.মি. বর্গাকার পাথরের পরিসীমা 16 সে.মি.
ii. 3 সে.মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রফল 3π বর্গ সে.মি.
iii. 5 সে.মি. উচ্চতা এবং 2 সে.মি. ব্যাসার্ধের বেলন আকৃতির বস্তুর আয়তন 20π ঘন সে.মি.

ওপরের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : খ) i ও iii

৫। চিত্রের তথ্য অনুসারে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

৫। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

ক 13 খ 14
গ 14.4 প্রায় ঘ 15

উত্তর : গ) 14.4 প্রায়

৬। ADF বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল কত?

ক 16 খ 32
গ 64 ঘ 128

উত্তর : ক) 16

৭। AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি কত?

ক 18 খ 18.85 (প্রায়)
গ 37.7 (প্রায়) ঘ 96

উত্তর : খ) 18.85 (প্রায়)

৮। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মিটার, 12 মিটার ও 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a = 16 মিটার b = 12 মিটার এবং c = 4.5 মিটার।

∴ আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + ca + bc)$ বর্গ একক

$= 2(16 \times 12 + 4.5 \times 16 + 12 \times 4.5)$ বর্গ একক

$= 2(192 + 72 + 54)$ বর্গ একক

$= 2 \times 318$ বর্গ একক

$= 636$ বর্গ একক

আয়াতাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (4.5)^2}$

$= \sqrt{256 + 144 + 20.25}$

$= \sqrt{420.25}$

$= 20.5$ একক

আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন $= a \times b \times c$

$= 16 \times 12 \times 4.5$

$= 864$ ঘন মিটার

∴ নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 636 বর্গ মিটার, কর্ণের দৈর্ঘ্য 20.5 মিটার এবং আয়তন 864 ঘন মিটার।

৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21:16:12 এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 87 সে.মি. হলে, ঘন বস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল।

সমাধান : মনে করি, আয়তিক ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য = a সে.মি.

প্রস্থ = b সে.মি.

এবং উচ্চতা = c সে.মি.

∴ আয়তিক ঘনটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = $2(ab + bc + ca)$ বর্গ সে.মি.
আবার, কর্ণ = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ সে.মি.
প্রশ্নানুসারে,
$a : b : c = 21 : 16 : 12$.......(i)
এবং $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 87$............(ii)
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,
$a : b : c = 21 : 16 : 12$
বা, $\frac{a}{21} = \frac{b}{16} = \frac{c}{12} = x$ (ধরি)
∴ $a = 21x, b = 16x, c = 12x$
এখন, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,
$\sqrt{(21x)^2 + (16x)^2 + (12x)^2} = 87$
[a, b ও c এর মান বসিয়ে]
বা, $(21x)^2 + (16x)^2 + (12x)^2 = (87)^2$ [বর্গ করে]
বা, $441x^2 + 256x^2 + 144x^2 = 87 \times 87$
বা, $x^2 = \frac{7569}{841}$ (9)
বা, $x^2 = 9$
∴ $x = 3$
∴ দৈর্ঘ্য = $21 \times x = 21 \times 3 = 63$ সে.মি.
প্রস্থ = $16x = 16 \times 3 = 48$ সে.মি.
এবং উচ্চতা = $12x = 12 \times 3 = 36$ সে.মি.
∴ আয়তিক ঘনটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল
$= 2(63 \times 48 + 48 \times 36 + 36 \times 63)$
$= 2(3024 + 1728 + 2268)$
$= 2 \times 7020$
$= 14040$ বর্গ সে.মি.
অতএব, আয়তিক ঘনটির তলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 14040 বর্গ সে.মি.

১০। একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গ মিটার ভূমির উপর দণ্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য = a মি.
" " প্রস্থ = b মি.
∴ ভূমির ক্ষেত্রফল = ab বর্গ মি. = 48 বর্গ মি.
আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তু এর কর্ণ (d) = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
এখানে, উচ্চতা (c) = 3 মিটার
∴ $13 = \sqrt{a^2+b^2+3^2}$
বা, $169 = a^2 + b^2 + 9$
বা, $a^2 + b^2 = 169 - 9 = 160$ .... (i)
∴ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$= 160 + 2 \times 48$
[যেহেতু $a^2 + b^2 = 160$ ও $ab = 48$]
$= 256$
∴ $a + b = \sqrt{256}$
∴ $a + b = 16$ .... (ii)
আবার, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$= 160 - (2 \times 48) = 64$
∴ $a - b = \sqrt{64}$
$a - b = 8$ .... (iii)
এখন, (ii) + (iii) থেকে পাই, $2a = 24$ বা, $a = 12$
এবং, (ii) – (iii) থেকে পাই, $2b = 8$, বা, $b = 4$
অতএব, দৈর্ঘ্য = 12 মিটার এবং প্রস্থ = 4 মিটার। (Ans.)

১১। একটি আয়তাকার বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 8 সে.মি., 6 সে.মি. ও 4 সে.মি. এবং ভেতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সে.মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :
মনে করি, কাঠের পুরুত্ব = x সে.মি.
অতএব, বাক্সের ভেতরের দৈর্ঘ্য (a) = $(8 - 2x)$ সে.মি.
বাক্সের ভেতরের প্রস্থ (b) = $(6 - 2x)$ সে.মি.
এবং বাক্সের ভেতরের উচ্চতা (c) = $(4 - 2x)$ সে.মি.
সুতরাং, বাক্সটির ভেতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $2(ab + bc + ca)$
$= 2\{(8-2x)(6-2x) + (6-2x) + (4-2x)(4-2x)(8-2x)\}$ বর্গ সে.মি.
$= (48 - 28x + 4x^2 + 24 - 20x + 4x^2 + 32 - 24x + 4x^2)$ বর্গ সে.মি.
$= 2(12x^2 - 72x + 104)$ বর্গ সে.মি.
প্রশ্নানুসারে, $2(12x^2 - 72x + 104) = 88$
বা, $12x^2 - 72x + 104 = 44$
বা, $12x^2 - 72x + 104 - 44 = 0$
বা, $12x^2 - 72x + 60 = 0$
বা, $12(x^2 - 6x + 5) 0$
বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$
বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$
বা, $x(x-5) - 1(x-5) = 0$
বা, $(x-5)(x-1) = 0$
হয়, $x - 5 = 0$ অথবা, $x - 1 = 0$
∴ $x = 5$ ∴ $x = 1$
যেহেতু বাক্সের বাইরের উচ্চতা 4 সে.মি. সেহেতু ভেতরের উচ্চতা 5 সে.মি. হতে পারে না।
অতএব, বাক্সের পুরুত্ব 1 সে.মি. (Ans.)

১২। একটি দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 25 মিটার, উচ্চতা 6 মিটার এবং পুরুত্ব 30 সে.মি.। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি. প্রস্থ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,
দেওয়ালের দৈর্ঘ্য = 25 মিটার
= 2500 সে.মি.
প্রস্থ = 6 মিটার
= 600 সে.মি.
পুরুত্ব = 30 সে.মি.
দেওয়ালটির আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × পুরুত্ব

$= (2500 \times 600 \times 30)$ সে.মি.

$= 45000000$ সে.মি.

আবার একটি ইটের দৈর্ঘ্য = 10 সে.মি.

প্রস্থ = 5 সে.মি.

পুরুত্ব বা উচ্চতা = 3 সে.মি.

∴ ইটের আয়তন = $(10 \times 5 \times 3)$ সে.মি.

= 150 সে.মি.

এখান, 150 সে.মি. = 1 টি ইট

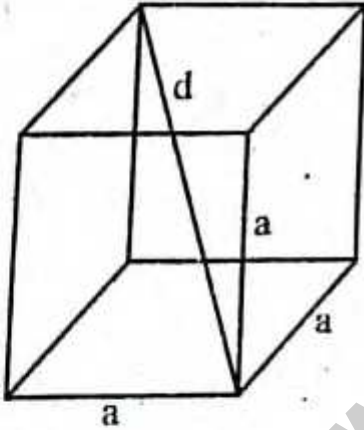
∴ 1 " " $= \frac{1}{150}$ " "

∴ 45000000 " " $= \frac{1 \times 45000000}{150}$ " "

= 300000 টি ইট।

অতএব, দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা 300000 টি। (Ans.)

১৩। একটি ঘনক আকৃতি বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর বর্গের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ একক যেখানে ঘনকের, দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক।

∴ কর্ণ $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$= \sqrt{3a^2}$

$= \sqrt{3}a$

ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2400 বর্গ সে.মি.

∴ প্রশ্নানুসারে $6a^2 = 2400$

বা, $a^2 = \frac{2400}{6}$

বা, $a^2 = 400$

বা, $a^2 = 20^2$

∴ $a = 20$

∴ কর্ণ $= \sqrt{3} \times a$

$= \sqrt{3} \times 20$

= 34.641 সে.মি. (প্রায়)

∴ অতএব ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য 34.641 সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

১৪। 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক।

তাহলে বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(h + r)$ বর্গ একক।

এখানে, r = 5 সে.মি. এবং h = 12 সে.মি.

অতএব বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times 3.1416 \times 5 \times (12 + 5)$ বর্গ সে.মি.

$= (2 \times 3.1416 \times 5 \times 17)$ বর্গ সে.মি.

= 534.072 বর্গ সে.মি.

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2h$ ঘন সে.মি.

$= 3.1416 \times (5)^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 3.1416 \times 25 \times 12$ ঘন সে.মি.

= 942.48 ঘন সে.মি.

অতএব, সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 534.072 বর্গ সে.মি. এবং বেলনের আয়তন 942.48 বর্গ সে.মি. } (Ans.)

১৫। একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং এর আয়তন 150 ঘন সে.মি. বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ r সে.মি. এবং উচ্চতা h সে.মি.

তাহলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ ঘন সে.মি.

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2h$ ঘন সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $\pi r^2h = 150$ .... (i)

এবং $2\pi rh = 100$ .... (ii)

(i) ÷ (ii) থেকে পাই,

$\frac{\pi r^2h}{2\pi rh} = \frac{150}{100}$

বা, $r = 3$

∴ ভূমির ব্যাসার্ধ = 3 সে.মি.

সমীকরণ (ii) এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$2 \times 3.1416 \times 3 \times h = 100$

বা, $h = \frac{100}{2 \times 3.1416 \times 3} = 5.3052$

∴ বেলনের উচ্চতা = 5.3052 সে.মি.।

অতএব, বেলুনের উচ্চতা 5.3052 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. } (Ans.)

১৬। একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি. এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে, সমগ্রতল নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ বর্গ একক

প্রশ্নানুসারে $2\pi rh = 4400$

বা, $r = \frac{4400}{2\pi h}$

$= \frac{4400}{2 \times 3.1416 \times 30}$ [∴ h = 30]

$= \frac{4400}{188.496}$

= 23.343 সে.মি.

আবার সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi r(h + r)$ বর্গ একক

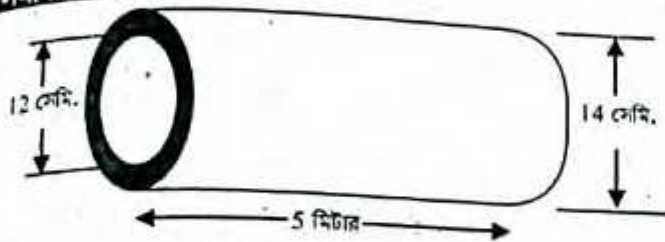
$= 2 \times 3.1416 \times 23.343(30 + 23.343)$ বর্গ সে.মি.

$= 146.6687 \times 53.343$ বর্গ সে.মি.

= 7823.75 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

অতএব সিলিন্ডারের সমগ্রতল 7823.75 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

১৭। একটি পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন 7.2 গ্রাম হলে, পাইপের লোহার ওজন কত?

সমাধান :

এখানে, পাইপের বাইরের ব্যাস = 14 সে.মি.

∴ পাইপের বাইরের ব্যাসার্ধ, $r_1 = \frac{14}{2} = 7$ সে.মি.

পাইপের ভেতরের ব্যাস = 12 সে.মি.

∴ পাইপের ভেতরের ব্যাসার্ধ, $r_2 = \frac{12}{2} = 6$ সে.মি.

পাইপের উচ্চতা, h = 5 মিটার

$= 5 \times 100$ সে.মি.

= 500 সে.মি.

আমরা জানি, পাইপের আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘন একক

∴ পাইপের বাইরের আয়তন = $\pi r_1^2 h$ ঘন একক

এবং পাইপের ভেতরের আয়তন = $\pi r_2^2 h$ ঘন একক

প্রশ্নানুসারে, লোহার আয়তন = পাইপের বাইরের আয়তন − পাইপের ভেতরের আয়তন

$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$

$= \pi(r_1^2 - r_2^2) \times h$

$= \pi(7^2 - 6^2) \times 500$ [r_1 ও r_2 এর মান বসিয়ে]

$= \pi(49 - 36) \times 500$

$= 3.1416 \times 13 \times 500$

= 20420.4 ঘন সে.মি.

দেওয়া আছে, 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন = 7.2 গ্রাম

∴ 20420.4 " " " $= 7.2 \times 20420.4$ গ্রাম

= 147026.88 গ্রাম

$= \frac{147026.88}{1000}$

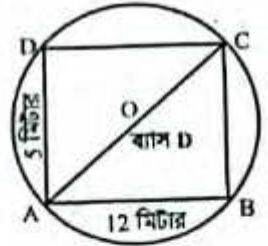
= 147.02688

= 147.027 কেজি (প্রায়)

অতএব, পাইপের লোহার ওজন 147.027 কেজি (প্রায়)। (Ans.)

১৮। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে যেখানে আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা অনাধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

ক) উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র আঁকা।
খ) বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।
গ) প্রতি বর্গমিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে, মোট খরচ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। যার দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও প্রস্থ 5 মিটার। এই আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে। যার কেন্দ্র O. ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ হবে বৃত্তের ব্যাস। নির্ণেয় চিত্রটি হলো

(খ) ক এর বর্ণনা অনুসারে বৃত্তটির ব্যাস হলো বৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রটির কর্ণ।

∴ আয়ত ক্ষেত্রটির কর্ণ = $\sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2}$

$= \sqrt{12^2 + 5^2}$

$= \sqrt{144 + 25}$

$= \sqrt{169}$

= 13 মিটার

অতএব, বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস 13 মিটার।

(গ) বৃত্তটির ব্যাস 13 মিটার

∴ " ব্যাসার্ধ $\frac{13}{2}$ মিটার

= 6.5 মিটার

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$= \pi \times (6.5)^2$

$= 3.1416 \times 42.25$

= 132.7326 বর্গ মিটার

আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$= (12 \times 5)$ বর্গ মিটার

= 60 বর্গ মিটার

অতএব বৃত্তের অনাধিকৃত অংশের পরিমাণ (132.7326 − 60) বর্গ মি.

= 72.7326 বর্গ মিটার

এখন,

1 বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে খরচ হয় 50 টাকা

∴ 72.7326 " " " " " (50×72.7326) টাকা

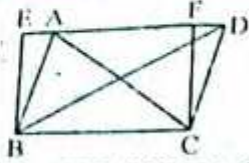
= 3636.63 টাকা

অতএব মোট খরচ হবে 3636.63 টাকা। (Ans.)

১৯। ΔABC ও ΔBCD একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।

ক) উপরের বর্ণনা অনুসারে চিত্রটি আঁক।
খ) প্রমাণ কর যে Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র BCD।
গ) Δ ক্ষেত্র ABC এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোন একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক।)

সমাধান :

ক) মনে করি, ΔABC ও ΔBCD সবই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। চিত্রটি হলো।

খ) প্রমাণ করতে হবে Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র BCD.

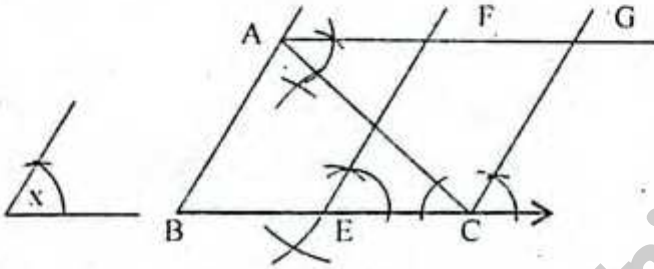
অঙ্কণ : BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BE ও CF লম্ব অঙ্কন করি। এরা AD রেখার বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে এবং AD রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ফলে EBCF একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়।

প্রমাণ : EBCF একটি আয়তক্ষেত্র, এখন Δ ক্ষেত্র ABC এবং আয়তক্ষেত্র EBCF একই ভূমি BC এর উপর এবং BC ও ED সমান্তরাল রেখাংশের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং Δ ক্ষেত্র ABC = $\frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র EBCF)

অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র BCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র EBCF)

∴ Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র BCD (প্রমাণিত)

গ)

দেওয়া আছে, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। মনে করি, ∠x একটি নির্দিষ্ট কোণ। একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যেন ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC এর সমান হয়।

অঙ্কন : BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে ∠x এর সমান ∠CEF আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল A রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ECGF ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক যার ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর সমান। (প্রমাণিত)

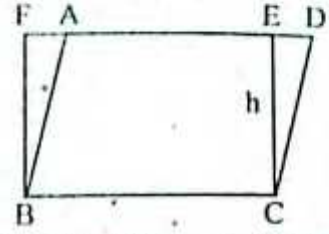
২০। একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এবং একটি আয়তক্ষেত্র BCEF উভয়ের ভূমি BC.

ক) একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিক ক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।

খ) দেখাও যে ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ) আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5:3 এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) একই উচ্চতা h বিবেচনা করে সামান্তরিক ক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁকা হলো--

খ) সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হওয়ায়, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্র ও BCEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও CF এর মধ্যে অবস্থিত।

আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোন সমকোণ।

সুতরাং CDE সমকোণী ত্রিভুজ। CD, CDE সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হওয়ায় CD > CE

এখন BCEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(BC + CE)
= 2BC + 2CE

এবং ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা = 2(BC + CD)
= 2BC + 2CD

যেহেতু CD > CE

∴ 2BC + 2CD > 2BC + 2CE

অতএব ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা > BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা (Showed)

গ) দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5:3 এবং পরিসীমা 48 মিটার।

মনে করি, দৈর্ঘ্য 5x মিটার এবং প্রস্থ 3x মিটার

প্রশ্নানুসারে, 2(5x + 3x) = 48

বা, 2(8x) = 48

বা, 16x = 48

বা, $x = \frac{48}{16}$

∴ x = 3

∴ আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = 5 × 3 = 15 মিটার এবং প্রস্থ = 3 × 3 = 9 মিটার।

আমরা জানি,

সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

ক্ষেত্রফল = (15 × 9) বর্গ মিটার [∴ ভূমি = দৈর্ঘ্য, উচ্চতা = প্রস্থ]

= 135 বর্গ মিটার

অতএব সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 135 বর্গ মিটার (Ans.)

পরিসংখ্যান

❑ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ➢ ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- ➢ গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

❑ **উপাত্তের উপস্থাপন :** আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলোর বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। আর উপাত্তসমূহের সারণিভুক্ত করা হলো উপাত্তের উপস্থাপন। আগের শ্রেণিতে আমরা উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্তের সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বোঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতির পুনরালোচনা করা হলো।

❑ **ক্রমযোজিত গণসংখ্যা :**

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ৩ ব্যবধান ধরে শ্রেণিসংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়েছে। উল্লিখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা ৩। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো ৬° – ৮°। এই শ্রেণির নিম্নসীমা ৬° সে. এবং উচ্চসীমা ৮° সে.। এই শ্রেণির গণসংখ্যা ১১।

দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা ১১ এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩ যোগ করে পাই ২৪। এই ২৪ হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে ১১। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ২৪ এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে ২৪ + ৭ = ৩১, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। ওপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ ১ এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা সেলসিয়াস	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৬° – ৮°	১১	১১
৯° – ১১°	১৩	(১১ + ১৩) = ২৪
১২° – ১৪°	৭	(২৪ + ৭) = ৩১

❑ **বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক :** পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধু পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদানুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যেসকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১–এ ব্যবহৃত তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্ত। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সংশ্লিষ্ট উপাত্তে যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে ৮·৫° ও ৫·৫° এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা ১১·৫০ ও ৮·৫০ ইত্যাদি।

❑ **উপাত্তের লেখচিত্র :** আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বোঝার জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। ৮ম

শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ চিত্র ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

❑ **গণসংখ্যা বহুভুজ** (*Frequency Polygon*) : ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ এঁকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

❑ **কেন্দ্রীয় প্রবণতা :** সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও এর পরিমাপ সমন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক এবং (৩) প্রচুরক।

❑ **গাণিতিক গড় :** আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

❑ **শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি)**

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ –

১। শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২। মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩। প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে তাকে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে ধাপ বিচ্যুতি

$$U = \frac{\text{মধ্যমান} - \text{আনুমানিক গড়}}{\text{শ্রেণি ব্যাপ্তি}}$$ নির্ণয় করা

৪। ধাপ বিচ্যুতিসমূহে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫। বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাঙ্ক্ষিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো :

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$ যেখানে, $\bar{x}$ = নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, f_i = i-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, $u_i f_i$ = n-তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি h = শ্রেণি ব্যাপ্তি

গুরুত্ব প্রদত্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় : অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ হয় এবং এদের গুরুত্ব যদি $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ হয় তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

❑ **মধ্যক :** ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত সমান দুইভাগে ভাগ করে সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক, আরও জেনেছি যে, যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে, সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

❑ শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় :

যদি শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হয় n, তবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের $\frac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\frac{n}{2}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

❑ প্রচুরক : ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোনো উপাত্তে যদি কোনো সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তের কোনো প্রচুরক নেই। এখানে কীভাবে সূত্র ব্যবহার করে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

❑ শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় :

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের সূত্র হলো :

প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$ যেখানে L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান, f_1 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা, f_2 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h = শ্রেণি ব্যাপ্তি।

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ–১ : তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থী দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর। [পৃষ্ঠা–২৭৯]

সমাধান : আমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থী সংখ্যা ৬০। এদেরকে দুটি দলে বিভক্ত করে নাম দিই 'ক' দল ও 'খ' দল। তাদের ওজন কেজিতে দেওয়া হলো। এদের নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করি।

'ক' দল : ৪২, ৩৮, ৫১, ৪৪, ৫৬, ৪৫, ৪৩, ৪২, ৫৩, ৫৪, ৪৩, ৩৬, ৫৬, ৬২, ৪৯, ৩৯, ৪৭, ৬৪, ৪০, ৪১, ৫০, ৪৯, ৫৭, ৫২, ৪৯, ৫৩, ৪৮, ৫২, ৫৬, ৪৯।

এখানে, সর্বোচ্চ উপাত্ত = ৬৪
সর্বনিম্ন উপাত্ত = ৩৬
উপাত্তের পরিধি = (৬৪ – ৩৬) + ১
= ২৯

শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরা হলে শ্রেণি সংখ্যা $= \frac{২৯}{৫}$ = ৫.৮ বা ৬

এখন, ৩৫ থেকে শুরু করে শ্রেণি ব্যবধান ৫ নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হলো।

ওজন (কেজি)	ট্যালি	গণসংখ্যা
৩৫ – ৩৯	|||	৩
৪০ – ৪৪	~~||||~~ ||	৭
৪৫ – ৪৯	~~||||~~ ||	৭
৫০ – ৫৪	~~||||~~ ||	৭
৫৫ – ৫৯	||||	৪
৬০ – ৬৪	||	২
		মোট = ৩০

'খ' দল : ৬১, ৬০, ৫৯, ৫৮, ৬৪, ৬৪, ৬৩, ৬১, ৫০, ৫৯, ৫৮, ৫৮, ৫৭, ৬৬, ৬৪, ৬৪, ৫৯, ৬৪, ৬৪, ৫৪, ৪৩, ৪২, ৪২, ৪৫, ৫০, ৪০, ৪৯, ৪৭, ৪৪, ৪০।

এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪০
এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৬৬

উপাত্তের পরিধি = (৬৬ – ৪০) + ১ = ২৭

শ্রেণি ব্যবধান যদি ৫ ধরা হয়,

তবে শ্রেণি সংখ্যা $= \frac{২৭}{৫}$ = ৫.৪

∴ ৪০ থেকে শুরু করে শ্রেণিব্যাপ্তি ৫ ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণিব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা
৪০ – ৪৪	~~||||~~		৬
৪৫ – ৪৯	|||	৩
৫০ – ৫৪	|||	৩
৫৫ – ৫৯	~~||||~~ ||	৭
৬০ – ৬৪	~~||||~~ ~~||||~~	১০
৬৫ – ৬৯			১
		মোট = ৩০

❑ কাজ–২: তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

সমাধান : আমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে ৪০ জনের দল গঠন করি। তাদের উচ্চতা নিচে সেন্টিমিটারে দেওয়া হলো। এদের নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো–

১৪২, ১৪৯, ১৩৮, ১৫০, ১৫১, ১৪৪, ১৫৬, ১৫৩, ১৪৫, ১৪৩, ১৪৬, ১৪২, ১৫৩, ১৫৪, ১৫০, ১৪৬, ১৪৩, ১৩৬, ১৪৮, ১৫৬, ১৬২, ১৪৯, ১৩৯, ১৪৭, ১৪৬, ১৫৪, ১৬৪, ১৪০, ১৪১, ১৭৪, ১৪৯, ১৫০, ১৪৯, ১৫৭, ১৫২, ১৪৯, ১৫৩, ১৪৮, ১৫২, ১৫৬।

প্রদত্ত উচ্চতাগুলোর সর্বনিম্ন উচ্চতা ১৩৬ এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা ১৭৪।

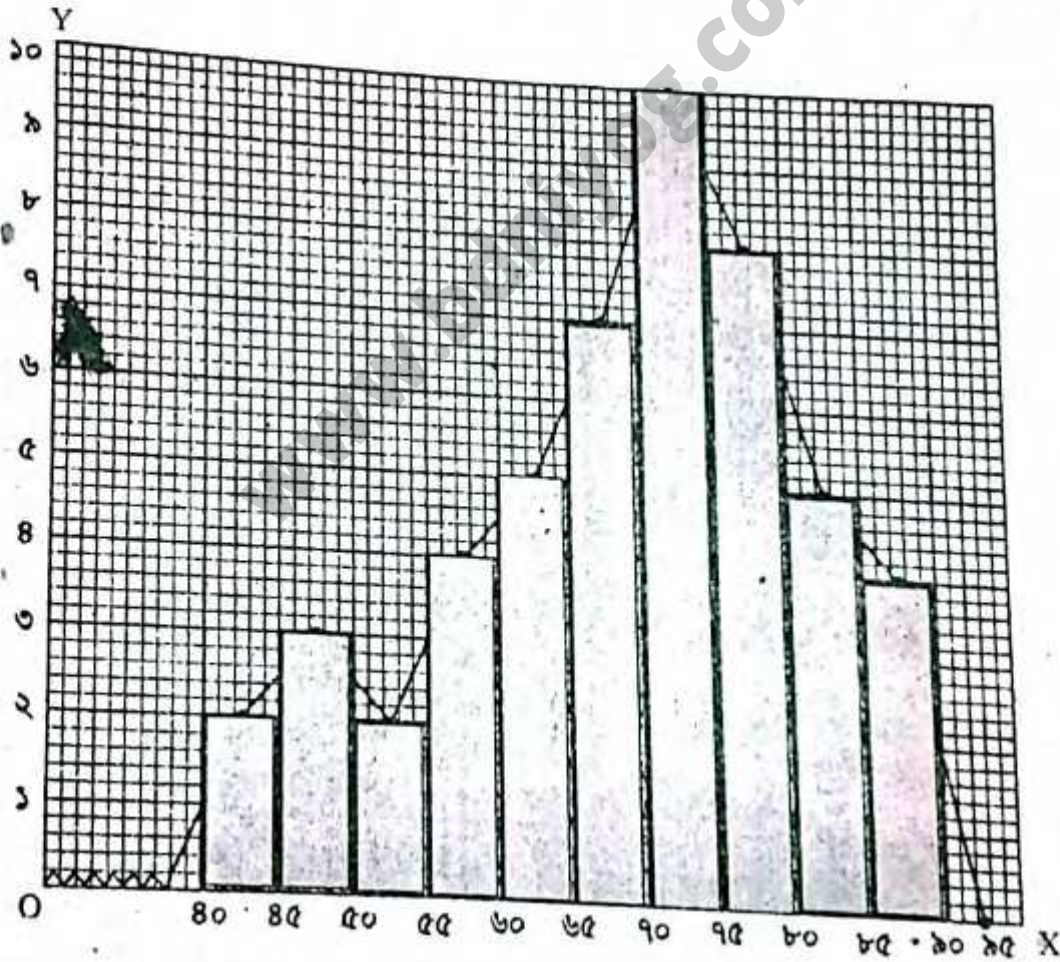
∴ ১৩৫ থেকে শুরু করে শ্রেণি বিস্তার ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণিব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
১৩৫ – ১৩৯	|||	৩	৩
১৪০ – ১৪৪	|||| ||	৭	১০
১৪৫ – ১৪৯	|||| |||| ||	১২	২২
১৫০ – ১৫৪	|||| |||| |	১১	৩৩
১৫৫ – ১৫৯	||||	৪	৩৭
১৬০ – ১৬৪	||	২	৩৯
১৬৫ – ১৬৯		০	৩৯
১৭০ – ১৭৪	|	১	৪০
		n = ৪০	

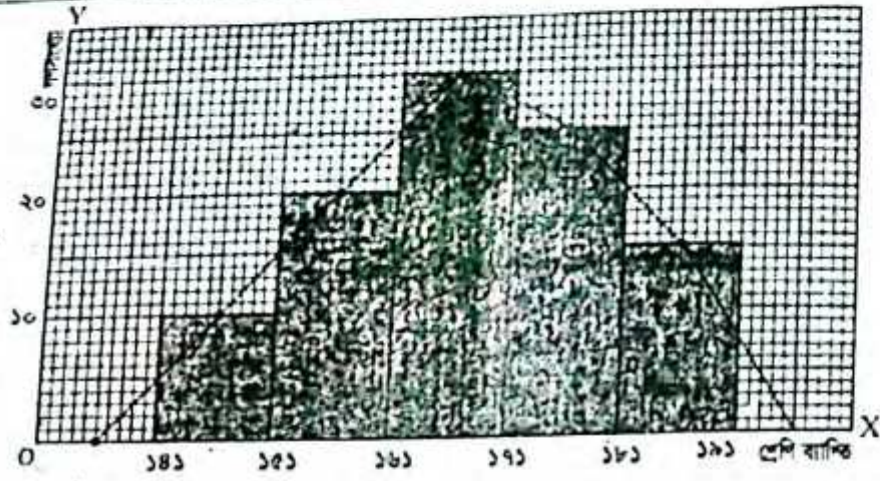
☐ **কাজ–৩:** তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক। [পৃষ্ঠা–২৮২]

সমাধান: আমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত ৫০ জন শিক্ষার্থীর প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলা ১ম পত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন হলো নিম্নরূপ। গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৪০–৪৪	৪৫–৪৯	৫০–৫৪	৫৫–৫৯	৬০–৬৪	৬৫–৬৯	৭০–৭৪	৭৫–৭৯	৮০–৮৪	৮৫–৮৯
গণসংখ্যা	২	৩	২	৪	৫	৭	১০	৮	৫	৪
মধ্যবিন্দু	৪২	৪৭	৫২	৫৭	৬২	৬৭	৭২	৭৭	৮২	৮৭

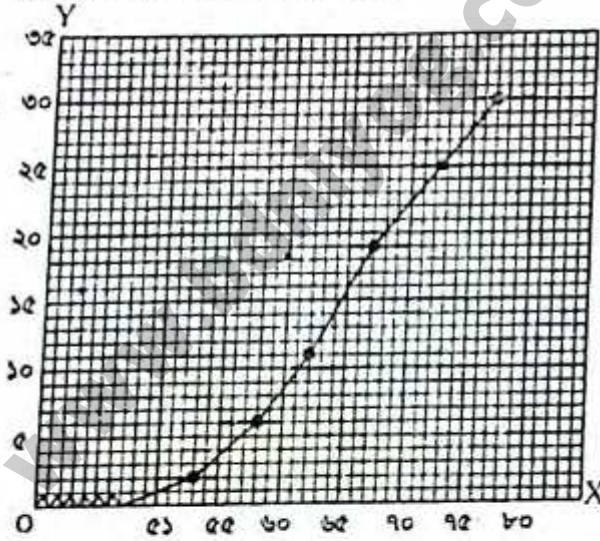
X–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ৫ ঘরকে শ্রেণি ব্যাপ্তির ৫ একক এবং Y–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতর ৫ ঘরকে গণসংখ্যার একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করি। চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তবিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তবিন্দু X–অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকি।

☐ **কাজ–৪:** ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক। [পৃষ্ঠা–২৮৩]

উচ্চতা (সে.মি.)	১৪১–১৫০	১৫১–১৬০	১৬১–১৭০	১৭১–১৮০	১৮১–১৯০
ছাত্রসংখ্যা	১০	২০	৩০	২৫	১৫

সমাধান: X–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের একক এবং Y–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে গণসংখ্যার একক ধরে উপর্যুক্ত উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকি।

☐ **কাজ–৫:** কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির ৫০ ও তদপেক্ষা নম্বর প্রাপ্ত ৩০ জন শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অজিভ রেখা আঁক। [পৃষ্ঠা–২৮৪]

সমাধান: গত প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় গণিতে আমাদের শ্রেণির ৫০ ও তদুপেক্ষা নম্বর প্রাপ্ত ৩০ জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। এ নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করে অজিভ রেখা আঁকতে হবে।

শ্রেণিব্যাপ্তি	৫১–৫৫	৫৬–৬০	৬১–৬৫	৬৬–৭০	৭১–৭৫	৭৬–৮০
গণসংখ্যা	২	৪	৫	৮	৬	৫
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	২	৬	১১	১৯	২৫	৩০

X–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ৫ ঘরকে শ্রেণিব্যাপ্তি এবং Y–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো।

☐ **কাজ–৬:** তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাসের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাসের গড় হার নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা–২৮৭]

সমাধান: আমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাসের হার ও শিক্ষার্থীদের সংখ্যা সংগ্রহ করে নিচে দেওয়া হলো। পাসের গড় হার নির্ণয় করতে হবে।

স্কুলের নাম	এস.এস.সি. পাসের হার x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা w_i	$x_i w_i$
চান্দিনা পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়	৮৫	১২০	১০২০০
চান্দিনা গার্লস স্কুল	৮০	৮০	৬৪০০
মাধাইয়া ছাদিম উচ্চ বিদ্যালয়	৭৫	১১০	৮২৫০
মহিচাইল উচ্চ বিদ্যালয়	৮২	২০০	১৬৪০০
কুটম্বপুর উচ্চ বিদ্যালয়	৯০	২৫০	২২৫০০
বাখরাবাদ উচ্চ বিদ্যালয়	৮৮	১৫০	১৩২০০
		$\sum w_i$ = ৯১০	$\sum x_i w_i$ = ৭৬৯৫০

পাসের গড় হার, $\overline{x_w} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{৭৬৯৫০}{৯১০}$ = ৮৪.৫৬

∴ নির্ণেয় পাসের গড় হার ৮৪.৫৬

☐ কাজ-৭: [পৃষ্ঠা-২৮৮]

১। তোমাদের শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান : আমাদের শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করতে হবে এবং সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

তাদের উচ্চতা নিচে দেওয়া হলো–

১৫০, ১৫০, ১৬০, ১৭০, ১৫০, ১৭৫, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৭৫, ১৬০, ১৫০, ১৬৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৭০, ১৬৫, ১৫০, ১৬৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৬৫, ১৭৫, ১৭০, ১৭৫, ১৬০ ১৫৫, ১৪০, ১৪৫, ১৪০, ১৪৫, ১৪০, ১৪৫, ১৫৫, ১৬০, ১৬৫, ১৬০, ১৭৫, ১৪০, ১৪৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৬৫।

মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা সারণি :

উচ্চতা সে.মি.	১৪০	১৪৫	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০	১৭৫
গণসংখ্যা	৪	৪	৮	২	৯	১০	৭	৫
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৪	৮	১৬	১৮	২৭	৩৭	৪৪	৪৯

এখানে n = ৪৯ যা বিজোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যক = $\frac{৪৯ + ১}{২}$ তম পদের মান

= ২৫ তম পদের মান

= ১৬০

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক ১৬০ সে.মি.

২। পূর্বের সমস্যা থেকে ৯ জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে ৪০ জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান :

উচ্চতা সে.মি.	১৪০	১৪৫	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০
গণসংখ্যা	৪	৪	৮	২	৯	১০	৩
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৪	৮	১৬	১৮	২৭	৩৭	৪০

এখানে, n = ৪০ যা জোড় সংখ্যা

$$\text{মধ্যক} = \frac{\frac{৪০}{২}\text{ তম ও }\left(\frac{৪০}{২}+১\right)\text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২}$$

$$= \frac{\text{২০ তম পদ ও ২১ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২} = \frac{১৬০ + ১৬০}{২}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক ১৬০ সে.মি.

☐ কাজ-৮ : তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৮৯]

সমাধান : আমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থী সংখ্যা ৬০। এদেরকে ৩০ জন করে দুইটি দলে ভাগ করে একটির নাম দেই 'পদ্মা' ও অন্যটির নাম 'মেঘনা'।

ক) 'পদ্মা' দলের ৩০ জন শিক্ষার্থীর একটি সমস্যা সমাধানে যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা নিচে দেওয়া হলো–

৪২, ৪৫, ৬০, ৬১, ৫৮, ৫৩, ৪৮, ৫২, ৫১, ৪৯, ৪৩, ৫২, ৫৭, ৫১, ৬৪, ৪৯, ৫৬, ৪৮, ৬৭, ৬৩, ৭০, ৫৯, ৫৪, ৪৬, ৪৩, ৫৬, ৬৯, ৪৩, ৬৮, ৪২।

এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪২ এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৭৩।

$\therefore$ পরিসর = ৭৩ − ৪২ + ১ = ৩২

শ্রেণি ব্যাপ্তি = ৫

$\therefore$ শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{৩২}{৫}$ = ৬.৪ ≈ ৭

৪০ থেকে শুরু করে ৫ শ্রেণি ব্যাপ্তি ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪০ − ৪৪	||||	৪	৪
৪৫ − ৪৯	~~||||~~ ||	৭	১১
৫০ − ৫৪	~~||||~~ |	৬	১৭

৫৫ – ৫৯	$\cancel{||||}$	৫	২২
৬০ – ৬৪	||||	৪	২৬
৬৫ – ৬৯	|||	৩	২৯
৭০ – ৭৪	|	১	৩০
		n = ৩০	

এখানে, n = ৩০ এবং $\frac{n}{2} = \frac{৩০}{২} = ১৫$ ।

∴ মধ্যক হলো ১৫ তম পদের মান। ১৫ তম পদের অবস্থান হবে (৫০ – ৫৪) শ্রেণিতে।

∴ মধ্যক শ্রেণি হলো (৫০ – ৫৪)

∴ L = ৫০, F_c = ১১, f_m = ৬ এবং h = ৫ ।

∴ মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$= ৫০ + \left(\frac{৩০}{২} - ১১\right) \times \frac{৫}{৬}$

$= ৫০ + ৪ \times \frac{৫}{৬}$

$= ৫০ + ৩.৩৩$

$= ৫৩.৩৩$

ঘ) মেঘনা দলের ৩০ জন শিক্ষার্থীর একটি সমস্যা সমাধানে যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা নিচে দেওয়া হলো।

৬২, ৭৪, ৪৫, ৭৯, ৫১, ৭৮, ৭৪, ৭০, ৭৩, ৭১, ৬৯, ৬৮, ৬৭, ৬৮, ৬৪, ৬৬, ৬৪, ৭৯, ৬৪, ৬৩, ৬৪, ৬২, ৬০, ৬১, ৫৯, ৬০, ৫৭, ৪৯, ৫০, ৪০ ।

এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪০ এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৭৯ ।

ধরি, শ্রেণি ব্যাপ্তি = ৫

∴ শ্রেণি সংখ্যা $= \frac{৪০}{৫} = ৮$

∴ ৪০ থেকে শুরু করে ৫ শ্রেণি ব্যাপ্তি বিশিষ্ট সারণি তৈরি করা হলো–

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪০ – ৪৪	|	১	১
৪৫ – ৪৯	||	২	৩
৫০ – ৫৪	||	২	৫
৫৫ – ৫৯	||	২	৭
৬০ – ৬৪	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	১০	১৭
৬৫ – ৬৯	$\cancel{||||}$	৫	২২
৭০ – ৭৪	$\cancel{||||}$	৫	২৭
৭৫ – ৭৯	|||	৩	৩০
		n = ৩০	

এখানে, n = ৩০ এবং $\frac{n}{2} = \frac{৩০}{২} = ১৫$

∴ মধ্যক হলো ১৫ তম পদের মান। ১৫ তম পদের অবস্থান হবে (৬০ – ৬৪)

∴ L = ৬০, F_c = ৭, f_m = ১০ এবং h = ৫

∴ মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$= ৬০ + \left(\frac{৩০}{২} - ৭\right) \times \frac{৫}{১০}$

$= ৬০ + ৮ \times \frac{৫}{১০} = ৬৪$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

সঠিক উত্তরে টিক (√) চিহ্ন দাও :

১. নিচের কোনটি দ্বারা শ্রেণি ব্যাপ্তি বোঝায়?
ক উপাত্তসমূহের মধ্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম উপাত্তের ব্যবধান
খ উপাত্তসমূহের মধ্যে প্রথম ও শেষ উপাত্তের ব্যবধান
গ প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার পার্থক্য
ঘ প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার সমষ্টি
(গ)

২. উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি?
ক শ্রেণি সীমা খ শ্রেণির মধ্যবিন্দু
গ শ্রেণি সংখ্যা ঘ শ্রেণির গণসংখ্যা
(ঘ)

৩. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়?
ক প্রচুরক খ কেন্দ্রীয় প্রবণতা
গ গড় ঘ মধ্যক
(খ)

নিচের পরিসংখ্যানের প্রেক্ষিতে ৪–৬ পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।
শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের ১০ দিনের তাপমাত্রার (সেন্টিগ্রেড) পরিসংখ্যান হলো
১০°, ৯°, ৮°, ৬°, ১১°, ১২°, ৭°, ১৩°, ১৪°, ৫°।

৪. ওপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি?
ক ১২° খ ৫°
গ ১৪° ঘ প্রচুরক নেই
(ঘ)

৫. ওপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি?
ক ৮° খ ৮.৫°
গ ৯.৫° ঘ ৯°
(গ)

৬. উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি?
ক ৯.৫° খ ৯°
গ ৮.৫° ঘ ৮°
(ক)

৭. সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L, মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F, মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m এবং শ্রেণি ব্যাপ্তি h। এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র?
(ক)

ক $L+\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$

খ $L+\left(\frac{n}{2}-f_m\right)\times\frac{h}{F_m}$

গ $L-\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$

ঘ $L-\left(\frac{n}{2}-f_m\right)\times\frac{h}{F_m}$

নিচের সারণি থেকে (৮–১৭) পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :
নিচে তোমাদের স্কুলের ৮ম শ্রেণি শেষে সমাপনী পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি দেওয়া হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
গণসংখ্যা	৬	১২	১৬	২৪	১২	৮	২
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৬	১৮	৩৪	৫৮	৭০	৭৮	৮০

৮. উপাত্তসমূহ কয়টি শ্রেণিতে বিন্যস্ত করা হয়েছে?
ক ৬ খ ৭
গ ৮ ঘ ৯
(খ)

৯. সারণিতে উপস্থাপিত উপাত্তের শ্রেণি ব্যাপ্তি কত?
ক ৫ খ ৯
গ ১০ ঘ ১৫
(গ)

১০. ৪র্থ শ্রেণির মধ্যমান কত?
ক ৭১.৫ খ ৬১.৫
গ ৭০.৫ ঘ ৭৫.৬
(গ)

১১. উপাত্তের মধ্যক শ্রেণি কোনটি?
ক ৪১–৫০ খ ৫১–৬০
গ ৬১–৭০ ঘ ৭১–৮০
(গ)

১২. মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা কত?
ক ১৮ খ ৩৪
গ ৫৮ ঘ ৭০
(গ)

১৩. মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা কত?
ক ৪১ খ ৫১
গ ৬১ ঘ ৭১
(গ)

১৪. মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা কত?
ক ১৬ খ ২৪
গ ৩৪ ঘ ৫৮
(খ)

১৫. উপস্থাপিত উপাত্তের মধ্যক কত?
ক ৬৩ খ ৬৩.৫
গ ৬৫ ঘ ৬৫.৫
(খ)

১৬. উপস্থাপিত উপাত্তের প্রচুরক কত?
ক ৬১.৪ খ ৬১
গ ৭০ ঘ ৭০.৪
(ক)

১৭। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর ওজন (কিলোগ্রাম) হলো–
৪৫, ৫০, ৫৫, ৫১, ৫৬, ৫৭, ৫৬, ৬০, ৫৮, ৬০, ৬১, ৬০, ৬২, ৬০, ৬৩, ৬৪, ৬০, ৬১, ৬৩, ৬৬, ৬৭, ৬১, ৭০, ৭০, ৬৮, ৬০, ৬৩, ৬১, ৫০, ৫৫, ৫৭, ৫৬, ৬৩, ৬০, ৬২, ৫৬, ৬৭, ৭০, ৬৯, ৭০, ৬৯, ৬৮, ৭০, ৬০, ৫৬, ৫৮, ৬১, ৬৩, ৬৪।
ক) শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।
খ) সারণি থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় কর।
গ) গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপিত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

সমাধান :
ক) শিক্ষার্থীদের সর্বোচ্চ ওজন = ৭০ কিলোগ্রাম
" সর্বনিম্ন " = ৪৫ "
∴ পরিসর = (৭০ − ৪৫) + ১ = ২৬
∴ শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{২৬}{৫}$ = ৫.২
অতএব, শ্রেণিসংখ্যা হবে ৬টি

শিক্ষার্থীদের ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
৪৫ – ৪৯	।	১
৫০ – ৫৪	।।।	৩
৫৫ – ৫৯	~~।।।।~~ ~~।।।।~~ ।	১১
৬০ – ৬৪	~~।।।।~~ ~~।।।।~~ ~~।।।।~~ ~~।।।।~~ ।।	২২
৬৫ – ৬৯	~~।।।।~~ ।।	৭
৭০ – ৭৪	~~।।।।~~	৫
	মোট	৪৯

খ) 'ক' থেকে প্রাপ্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণিব্যাপ্তি	মধ্যমান	গণসংখ্যা	ধাপ পদ্ধতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা × ধাপ বিচ্যুতি f_iu_i
৪৫ – ৪৯	৪৭	১	–৩	–৩
৫০ – ৫৪	৫২	৩	–২	–৬
৫৫ – ৫৯	৫৭	১১	–১	–১১
৬০ – ৬৪	৬২←a	২২	০	০
৬৫ – ৬৯	৬৭	৭	১	৭
৭০ – ৭৪	৭২	৫	২	১০
	মোট =	৪৯		–৩

∴ গড়, $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_iu_i}{n} \times h$

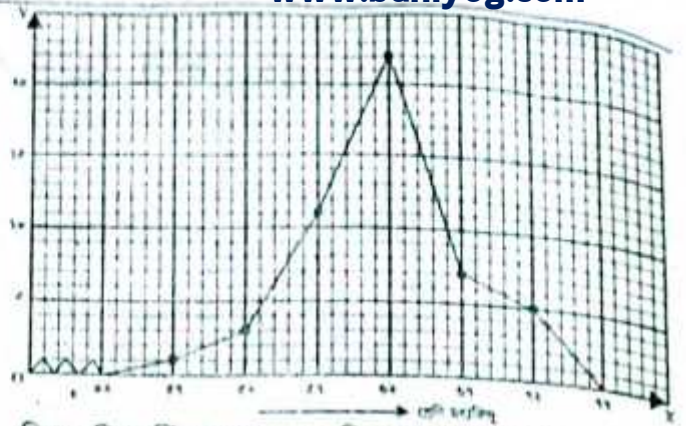
$= ৬২ + \frac{(-৩)}{৪৯} \times ৫$

$= ৬২ - ০.৩০৬১$

$= ৬১.৬৯$ কিলোগ্রাম (প্রায়)

গ) গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য প্রয়োজনীয় সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণিমধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
৪৫ – ৪৯	৪৭	১
৫০ – ৫৪	৫২	৩
৫৫ – ৫৯	৫৭	১১
৬০ – ৬৪	৬২	২২
৬৫ – ৬৯	৬৭	৭
৭০ – ৭৪	৭২	৫

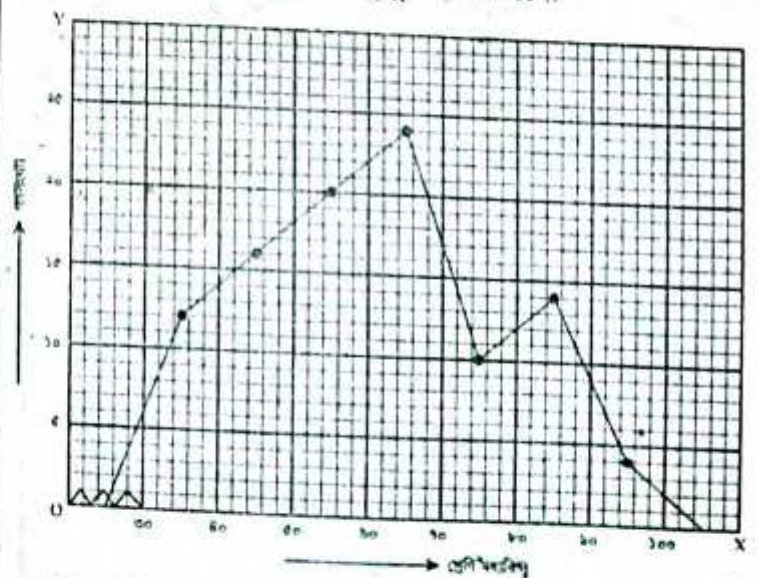
ছক কাগজে X-অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে এক একক ধরে শ্রেণি মধ্যবিন্দু এবং Y-অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে এক একক ধরে গণসংখ্যা নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে ৭২ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো বিদ্যমান বোঝাতে X-অক্ষে ভাঙা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

চিত্র : শিক্ষার্থীদের ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা বহুভুজ

১৮। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

শ্রেণিব্যাপ্তি	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
গণসংখ্যা	৬	৮	১০	১২	৫	৭	২

সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্তসমূহ বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক। শিক্ষার্থীদের গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো–

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
৩১ – ৪০	৩৫.৫	৬
৪১ – ৫০	৪৫.৫	৮
৫১ – ৬০	৫৫.৫	১০
৬১ – ৭০	৬৫.৫	১২
৭১ – ৮০	৭৫.৫	৫
৮১ – ৯০	৮৫.৫	৭
৯১ – ১০০	৯৫.৫	২

গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন : X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু ২ একক ধরে এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ২ ঘরকে গণসংখ্যার ১ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো–

চিত্র : শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা বহুভুজ।

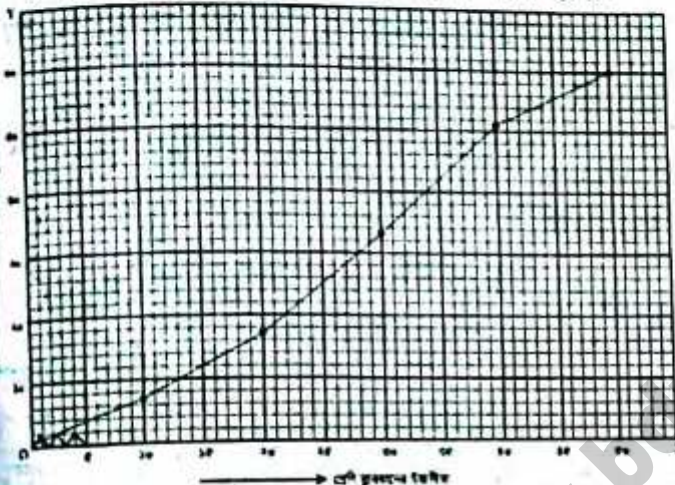
১৯। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো–

প্রাপ্ত নম্বর	১–১০	১১–২০	২১–৩০	৩১–৪০	৪১–৫০
গণসংখ্যা	৭	১০	১৬	১৮	৯

উপাত্তের অজিভ রেখা আঁক।

সমাধান : শিক্ষার্থীদের সাময়িক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
১ – ১০	৭	৭
১১ – ২০	১০	১৭
২১ – ৩০	১৬	৩৩
৩১ – ৪০	১৮	৫১
৪১ – ৫০	৯	৬০

অজিভ রেখা অঙ্কন : X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতিটি ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার ২ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের অজিভ রেখা আঁকা হলো–

চিত্র : শিক্ষার্থীদের সাময়িক পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের অজিভ রেখা

২০। নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৬৫	৭০
গণসংখ্যা	২	৬	৮	১৬	১২	৬

সমাধান : শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যক নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় সারণি :

ওজন (কেজি)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪৫	২	২
৫০	৬	৮
৫৫	৮	১৬
৬০	১৬	৩২
৬৫	১২	৪৪
৭০	৬	৫০
	n = ৫০	

এখন মধ্যক হবে, $\frac{n}{২} = \frac{৫০}{২}$ বা ২৫ তম পদ।

এখানে, ২৫ তম পদ রয়েছে ৪র্থ শ্রেণিতে।

সুতরাং মধ্যক ৬০

উত্তর : মধ্যক ৬০

২১। তোমাদের শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো–

ব্যাপ্তি	৪৫–৪৯	৫০–৫৪	৫৫–৫৯	৬০–৬৪	৬৫–৬৯	৭০–৭৪
গণসংখ্যা	৪	৮	১০	২০	১২	৬
যোজিত ফল	৪	১২	২২	৪২	৫৪	৬০

ক) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় কর।
খ) উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	যোজিত ফল
৪৫ – ৪৯	৪	৪
৫০ – ৫৪	৮	১২
৫৫ – ৫৯	১০	২২
৬০ – ৬৪	২০	৪২
৬৫ – ৬৯	১২	৫৪
৭০ – ৭৪	৬	৬০
	n = ৬০	

ক) মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$
$= ৬০ + (৩০ - ২২) \times \frac{৫}{২০}$
$= ৬০ + ৮ \times \frac{৫}{২০}$
$= ৬০ + ২$
$= ৬২$ কেজি
∴ নির্ণেয় মধ্যক ৬২

এখানে, মোট গণসংখ্যা n = ৬০
$\frac{n}{২} = \frac{৬০}{২}$ = ৩০ তম পদ
যেহেতু ৩০ তম পদ (৬০ – ৬৪) শ্রেণিতে অবস্থিত। সুতরাং, মধ্যক শ্রেণি হলো (৬০ – ৬৪)
এখানে, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা, L = ৬০,
মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, F_c = ২২
মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m = ২০
শ্রেণিব্যবধান, h = ৫

খ) প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$
$= ৬০ + \frac{১০}{১০ + ৮} \times ৫$
$= ৬০ + \frac{১০}{১৮} \times ৫$
$= ৬০ + ২.৮$
$= ৬২.৮$
∴ নির্ণেয় প্রচুরক ৬২.৮

যেহেতু, (৬০ – ৬৪) শ্রেণির গণসংখ্যা সবচেয়ে বেশি।
সুতরাং, (৬০ – ৬৪) হলো প্রচুরক শ্রেণি L = ৬০
এখানে, প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, L = ৬০,
f_1 = (২০ – ১০) = ১০
f_2 = (২০ – ১২) = ৮
শ্রেণিব্যবধান, h = ৫

২২. উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক–
i. কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ
ii. সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত মান
iii. সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii, ও iii ⓖ

২৩। কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ :

৭৬, ৬৫, ৯৮, ৭৯, ৬৪, ৬৮, ৫৬, ৭৩, ৮৩, ৫৭, ৫৫, ৯২, ৪৫, ৭৭, ৮৭, ৪৬, ৩২, ৭৫, ৮৯, ৪৮, ৯৭, ৮৮, ৬৫, ৭৩, ৯৩, ৫৮, ৪১, ৬৯, ৬৩, ৩৯, ৮৪, ৫৬, ৪৫, ৭৩, ৯৩, ৬২, ৬৭, ৬৯, ৬৫, ৫৩, ৭৮, ৬৪, ৮৫, ৫৩, ৭৩, ৩৪, ৭৫, ৮২, ৬৭, ৬২।

ক) প্রদত্ত তথ্যটির ধরন কিরূপ? কোনো নিবেশনে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে?

খ) উপর্যুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন তৈরি কর।

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) প্রদত্ত তথ্যটি একটি অবিন্যস্ত উপাত্ত।

একটি শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা ঐ শ্রেণিতে উপাত্তের যতগুলো মান অন্তর্ভুক্ত হয় তার সংখ্যা নির্দেশ করে।

খ) এখানে সর্বনিম্ন প্রাপ্ত নম্বর = ৩২

এবং সর্বোচ্চ প্রাপ্ত নম্বর = ৯৮

$\therefore$ পরিসর = (৯৮ − ৩২) + ১ = ৬৬ + ১ = ৬৭

শ্রেণিব্যাপ্তি ১০ ধরে শ্রেণি সংখ্যা = $\frac{৬৭}{১০}$ = ৬.৭ ≈ ৭

অর্থাৎ শ্রেণি সংখ্যা হবে ৭।

গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
৩০ − ৩৯	|||	৩
৪০ − ৪৯	~~||||~~	৫
৫০ − ৫৯	~~||||~~ ||	৭
৬০ − ৬৯	~~||||~~ ~~||||~~ |||	১৩
৭০ − ৭৯	~~||||~~ ~~||||~~	১০
৮০ − ৮৯	~~||||~~ ||	৭
৯০ − ৯৯	~~||||~~	৫
মোট		৫০

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় :

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
৩০ − ৩৯	৩৪.৫	৩	− ৩	− ৯
৪০ − ৪৯	৪৪.৫	৫	− ২	− ১০
৫০ − ৫৯	৫৪.৫	৭	− ১	− ৭
৬০ − ৬৯	৬৪.৫	১৩	০	০
৭০ − ৭৯	৭৪.৫	১০	১	১০
৮০ − ৮৯	৮৪.৫	৭	২	১৪
৯০ − ৯৯	৯৪.৫	৫	৩	১৫
মোট		৫০		$\frac{\sum f_i u_i}{n}$ = ১৩

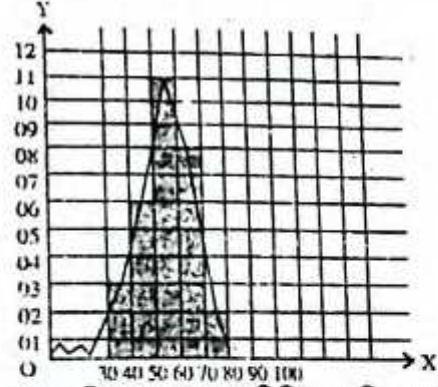
$\therefore$ গড় $= a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

$= ৬৪.৫ + \frac{১৩}{৫০} \times ১০$

$= ৬৪.৫ + ২.৬$

$= ৬৭.১০$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় ৬৭.১০

২৪।

ক) ওপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ) চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ) 'খ'-অংশে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেশনটির মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) চিত্রে প্রথম শ্রেণিটি গড় মধ্যমান = $\frac{30 + 39}{2} = \frac{69}{2}$ = 34.5 এবং শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা = 2

খ)

শ্রেণি ব্যাপ্তি	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
গণসংখ্যা	3	6	11	8	2
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	3	9	20	28	30

গ) মধ্যক নির্ণয় : এখানে, n = 30 এবং $= \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$\therefore$ মধ্যক হলো 15 তম পদের মান। 15 তম পদের অবস্থান হবে (50 - 59) শ্রেণিতে।

$\therefore$ $L = 50$, $F_c = 9$, $fm = 11$ এবং $h = 10$

$\therefore$ মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m} = 50 + \left(\frac{30}{2} - 9\right) \times \frac{10}{11} =$

$50 + \frac{6 \times 10}{11} = 50 + 5.453 = 55.454$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 55.45 (প্রায়)